UTR/alp

AALBORG UNIVERSITET ESBJERG

Skriftlig eksamen i

Partielle differentialligninger, sandsynlighedsregning og statistik
B3

Fredag den 14. januar 2011 kl. 09.00 – 13.00

Eksaminanden medbringer:	Alle hjælpemidler er tilladte med undtagelse af mobiltelefon og internetadgang. **Eksaminanderne medbringer selv papir til kladde og renskrift.**
Aflevering:	Bedømmelsen afleveres på ternet papir. Bilag kan eventuelt afleveres på USB-stick (der må kun være bilag på USB-stick). Opgave 1-4 afleveres i gult omslag til Jørgen Houe Pedersen. Opgave 5-7 afleveres i rødt omslag til Ulla Tradsborg. Besvarelserne bedes forsynet med navn, cpr. og sidenummer.

Bilag:	Ingen.

Opgave 1 starter på næste side.

Dette sæt indeholder i alt 7 opgaver. Ved bedømmelsen lægges der stor vægt på, at du tydeligt angiver den anvendte teori og metode.

OPGAVE 1 (11%)

Betragt flg. differentialligning:

$$y' + (x + 2)y^2 = 0$$

a) Er denne differentialligning lineær eller ulineær? (begrund svaret).
b) Find den generelle løsning til differentialligningen.

OPGAVE 2 (15%)

Der er givet to koblede differentialligninger:

$$x_1' = 2x_1 + 8x_2$$
$$x_2' = x_1 - 5x_2$$

a) Forklar hvordan du kan se, at der er tale om koblede differentialligninger.
b) Omskriv de to koblede differentialligninger til en matriksligning.
c) Find egenværdierne for koefficientmatriksen samt de tilhørende egenvektorer.
d) Find den generelle løsning til systemet af de to koblede differentialligninger.

OPGAVE 3 (14%)

Betragt en homogen metalstang med længden L=1. Stangen er fuldstændig termisk isoleret fra omgivelserne, dvs. såvel sidefladerne som endefladerne er termisk isolerede.

Stangen er fremstillet af et materiale, hvis termiske ledningsevne, specifikke varmekapacitet og massetæthed netop antager sådanne værdier, at den termiske diffusivitet er lig med 1, altså $c^2 = 1$.

Ved eksperimentets start har stangen en temperaturfordeling givet ved:

$$u(x,0) = \begin{cases} x & , \ 0 < x \leq ½ \\ 1 - x & , \ ½ < x < 1 \end{cases}$$

Hvor u(x,0) altså angiver temperaturen på stedkoordinaten x inde i stangen til tiden t = 0.

a) Find temperaturen som funktion af sted og tid inde i stangen, altså find u(x,t).
b) Lav en skitse (håndtegnet graf) der viser temperaturfordelingen inde i stangen til forskellige tidspunkter.

OPGAVE 4 (10%)

Der er udført nogle eksperimenter med i alt 20 målepunkter (sammenhørende x- og y-værdier), hvor datamaterialet anvendes i en simpel lineær regressionsanalyse. Dette har givet flg. tabel:

	Koefficient	standardafvigelse	T	p-værdi
Skæring	74,283	1,593	46,62	0,000
Hældning	14,947	1,317	11,35	0,000

s = 1,087 R^2 = 0,877

a) Opstil udtrykket for den bedste rette linie.
b) Giv en diskussion af T-testet med tilhørende nulhypotese, T-værdi og p-værdi.
c) Idet det oplyses, at $S_{xx} = 0{,}68$, bestem da 95% konfidensintervallet for hældningen.

Opgave 5. (30%)

Tykkelsen af en metalplade er normalfordelt med en middelværdi på 4,30 mm og en spredning på 0,12 mm.

a. Beregn sandsynligheden for at en plade har en tykkelse under 4,15 mm.
b. Beregn sandsynligheden for at en plade har en tykkelse mellem 4,10 mm og 4,55 mm.

5 plader placeres ovenpå hinanden.

c. Beregn sandsynligheden for at den samlede pladetykkelse for de 5 plader er over 22,5 mm.

Et parti af pladerne fremstilles i en valseproces. Af en produktion udtages følgende stikprøve til kontrol. Pladernes tykkelse er målt i mm:

4,25	4,07	4,17	4,35	4,45	4,65

d. Undersøg ved et test om spredningen for det ovennævnte parti er 0,12 mm.
e. Undersøg ved et test om middeltykkelsen er 4,30 mm.
f. Opstil et 95 % konfidensinterval for middeltykkelsen.

Opgave 6. (10%)

Funktionen f(x) = 3cos(x)-5x betragtes. Vi søger efter funktionens skæring med x-aksen. Roden i nærheden af 0 søges.

a. Opstil et iterationsudtryk vha. Fixed punkt metoden og diskutér om iterationen konvergerer.
b. Opstil et iterationsudtryk ved Newton Raphsons metode og gennemfør 10 beregninger.

Opgave 7. (10 %)

Givet følgende begyndelsesværdiproblem:

$$y' + (x+2)\,y^2 = 0 \quad og \quad y(0) = 1$$

a. Løs denne differentialligning vha. Eulers metode med stepstørrelsen h=0,25 for at finde y(2).
b. Løs denne differentialligning vha. Runge Kutta af 4'orden med stepstørrelsen h = 0,25 for at finde y(2).