JHP,UTR/bmj

AALBORG UNIVERSITET ESBJERG

Skriftlig reeksamen i

Partielle differentialligninger, sandsynlighedsregning og statistik
B3

Onsdag den 15. februar 2012 kl. 09.00 – 13.00

Eksaminanden medbringer:	Alle hjælpemidler er tilladte med undtagelse af mobiltelefon og internetadgang. **Eksaminanderne medbringer selv papir til kladde og renskrift.**
Aflevering:	Bedømmelsen afleveres på ternet papir. Beregninger kan eventuelt afleveres på USB-stik (der må kun være beregninger på USB-stik). Opgave UTR 1-3 afleveres i gult omslag til Ulla Tradsborg. Opgave JHP 1-4 afleveres i rødt omslag til Jørgen H. Pedersen Besvarelserne bedes forsynet med navn, cpr. og sidenummer. Hvis UDB-stik anvendes, skrives nummeret på omslaget

---

Bilag:	Ingen.

UTR Opgave 1 . (16%)

Givet følgende funktion

$$y(x) = \sqrt{-x^2 + 10\,x + 15}$$

Ovenstående funktion ønskes tilnærmet med et tredje grads Lagrange polynomium.

a. Beregn funktionsværdien y(x) for x = { 3,00 ; 4,50 ; 6,00 ; 7,00 }
b. Anvend de i spm a. fire beregnede punkter og opstil et udtryk for et tredje grads Lagrange Polynomium.
c. Beregn en tilnærmet værdi for x = 5,0.

UTR Opgave 2. (17 %)

Givet følgende første ordens differentialligning

$\frac{dy}{dx} = \frac{5-x}{y}$, der går gennem punktet (3 ; 6), dvs. y(3)=6.

a. For h =0,2 ønskes 3 trin beregnet ved hjælp af Runge Kutta af fjerde orden til fastlæggelse af en tilnærmet værdi for y(3,6).
b. Bestem ved hjælp af Adams - Moultons metode herefter yderligere 7 trin til fastlæggelse af en tilnærmet værdi for y(5,0).

UTR Opgave 3. (17 %)

Et parti glasplade har en middeltykkelse på 3,00 mm og en spredning på 0,12 mm. Tykkelsen antages at være normalfordelt.

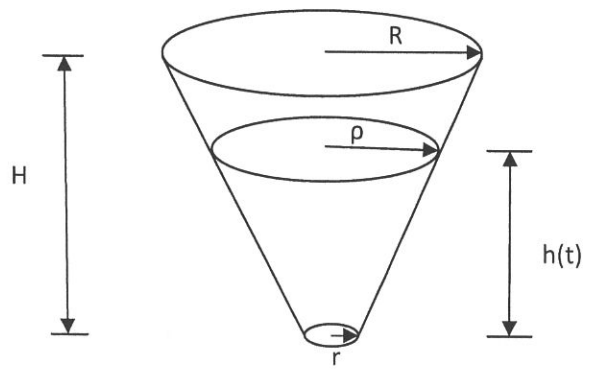
a. Beregn sandsynligheden for at en tilfældig udtrukken plade har en tykkelse under 2,87 mm.
b. Beregn sandsynligheden for at en tilfældig udtrukken plade har en tykkelse mellem 2,83 mm og 3,15 mm.

Af et stort parti udtrækkes tilfældigt 10 plader. Deres gennemsnitstykkelse findes til 2,74 mm med en standardafvigelse på 0,13 mm.

c. Undersøg ved et test om middeltykkelsen af glaspladerne i partiet er under 3,00 mm.
d. Opstil et 95 % konfidensinterval for middeltykkelsen.

OPGAVE JHP-1

Betragt en tank der har form som en keglestub. Tankens symmetriakse er lodret som vist på nedenstående skitse:



Væskestanden i tanken til tidspunktet t benævnes h(t), tankens højde er H, den øverste radius er R, og radius af udmundingen i tankens bund er r. Tyngdekraften bevirker, at væsken strømmer ud af udmundingen i tankens bund.

a) Det er ud fra den såkaldte Torricelli's lov man kan finde hastigheden af væsken der strømmer ud af tanken. Opskriv Torricelli's lov.
b) I løbet af et kort tidsinterval Δt strømmer der en lille mængde væske med voluminet ΔV ud af tanken. Find ΔV.
c) Væskestandens overflade til tidspunktet t danner en cirkel med radius ρ. Bestem denne radius udtrykt ved R, H og h(t).
d) Bestem arealet af væskestandens overflade.
e) I løbet af tidsintervallet Δt formindskes voluminet af den væskemængde der findes i tanken med ΔV^*. Find ΔV^*.
f) Den såkaldte kontinuitetssætning udtrykker, at volumenformindskelsen af væsken inde i tanken modsvares af det der strømmer ud af tanken. Udtryk dette vha. ΔV og ΔV^*. Anvend også de øvrige udtryk i opstillingen, herunder også Torricelli's lov.
g) Foretag grænseovergangen $\Delta t \to 0$. Hvilken slags differentialligning fremkommer hermed?
h) Find den generelle løsning til denne differentialligning, samt find den løsning der tilfredsstiller begyndelsesbetingelsen: $h(0) = H$.

OPGAVE JHP-2

Betragt flg. differentialligning:

$$y' + p(x)y = r(x)$$

opgave JHP-2 fortsættes

hvor $y = y(x)$.

a) Dersom y_1 er en løsning til denne differentialligning, hvad gælder der så om cy_1? (hvor c er en konstant).
b) Dersom både y_1 og y_2 er løsninger til denne differentialligning, altså $y_1' + p(x)y_1 = r_1(x)$ og $y_2' + p(x)y_2 = r_2(x)$, men med samme $p(x)$. Hvad gælder der så om $y_1 + y_2$?

OPGAVE JHP-3

Der er givet en homogen stang med længden $L = \pi$. Stangen er orienteret langs en x-akse og er fremstillet af et materiale, hvis massefylde ρ, specifikke varmekapacitet σ og varmeledningsevne K netop antager sådanne værdier, at den termiske diffusivitet er en, altså:

$$c^2 = \frac{K}{\sigma\rho} = 1$$

Stangens sideflader er termisk isolerede fra omgivelserne, hvorimod stangen kan vekselvirke termisk med omgivelserne via endefladerne, som fastholdes på den konstante temperatur nul grader, altså: $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, hvor temperaturen er angivet ved bogstavet u, som generelt afhænger af både sted og tid, dvs.: $u = u(x,t)$.

Når eksperimentet startes er temperaturfordelingen $f(x)$ inde i stangen givet ved:

$$f(x) = u(x,0) = \begin{cases} 0 \ ; \ 0 < x \le \frac{\pi}{4} \\ h\left(\frac{x}{\pi} - \frac{1}{4}\right) \ ; \ \frac{\pi}{4} < x \le \frac{\pi}{2} \\ h\left(\frac{3}{4} - \frac{x}{\pi}\right) \ ; \ \frac{\pi}{2} < x \le \frac{3\pi}{4} \\ 0 \ ; \ \frac{3\pi}{4} < x \le \pi \end{cases}$$

a) Kan konstanten h antage vilkårligt store værdier?

I bogen står anført flg. udtryk for begyndelsestemperaturen:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x)$$

b) Anfør nu – uden at regne – værdien for B_2 (begrund svaret).
c) Anfør – uden at regne – værdien for temperaturen i $x = \pi/3$ når der er gået uendelig lang tid (begrund svaret).
d) Find temperaturfordelingen inde i stangen til et vilkårligt tidspunkt vha. Fourier-rækker.

OPGAVE JHP-4

Nedenstående tabel giver værdierne for hhv. månedsløn (y) og antal års erfaring (x) for bygningsingeniører i en bestemt branche for nogle år siden. Værdierne er indløbet i tilfældig rækkefølge.

x	y	x	y	x	y
7	26075	20	43076	20	63022
28	79370	21	56000	20	47780
23	65726	18	58667	15	38853
18	41983	7	22210	25	66537
19	62309	2	20521	25	67447
15	41154	18	49717	28	64785
24	53610	11	33233	26	61581
13	33697	21	43628	27	70678
2	22444	4	16105	20	51301
8	32562	24	65644	18	39346

a) Indtegn værdierne i et koordinatsystem, hvor antal års erfaring afsættes ud af førsteaksen (x-aksen) og månedslønnen ud af andenaksen (y-aksen). Udfør endvidere en simpel lineær regressionsanalyse på datamaterialet.

b) Udfør regressionsanalysens variansanalyse; opstil herunder nulhypotesen for det pågældende F-test og giv en konklusion på dette test.

c) Opstil et 95% konfidensinterval for regressionsanalysens hældning.

d) Beregn residual-værdierne og plot disse i et passende koordinatsystem. Hvad konkluderer du på baggrund af dette plot?