Punktmængdetopologi, metriske rum, fuldstændighed

Morten Grud Rasmussen
7. marts 2016

Indhold

1 Punktmængdetopologi **2**
1.1 Topologiske rum 2
1.2 Kontinuitet 3
1.3 Konvergens 4
1.4 Kompakthed 5

2 Metriske rum **6**
2.1 Metrik, topologi og kontinuitet 6
2.2 Følgekompakthed er kompakthed 8
2.3 Normerede vektorrum 10

3 Fuldstændighed **11**
3.1 Fuldstændighed af metriske rum 11
3.2 Fuldstændiggørelse af et metrisk rum 14
3.3 Konstruktion af de reelle tal 16

4 Opgaver **20**
4.1 Punktmængdetopologi 20
4.2 Metriske rum 21
4.3 Fuldstændighed 21

Indledende bemærkninger

Disse noter er skrevet til brug i kurserne Analyse 1 og 2 ved Aalborg Universitet. De er opbygget, så Afsnit 1.3 og 2.2 kan springes over, hvis man ikke er interessseret i følgekompakthed, uden at det går ud over andet end Definition 1.16 og Sætning 2.5, som ikke spiller nogen rolle for andre resultater, samt Opgave 1.9, 1.10, 2.2 og 2.7.

1 Punktmængdetopologi

1.1 Topologiske rum

I algebra beskæftiger man sig bl.a. med abstrakte strukturer, hvori forskellige regneoperationer giver mening (sådanne objekter er eksempelvis grupper, talområder, legemer og vektorrum). På samme vis findes der abstrakte strukturer, hvori begreber som "i nærheden af," "omegn," "grænseværdi" og "kontinuitet" giver mening. Det viser sig, at nøglen til alle disse begreber er åbne mængder, og den mest abstrakte struktur, hvori "åbne mængder" giver mening, er de såkaldte *topologiske rum*:

Definition 1.1 (Topologisk rum)**.** Lad X være en mængde og $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subset X\}$ betegne mængden af alle delmængder af X inklusive X selv og den tomme mængde $\varnothing$: $X, \varnothing \in \mathcal{P}(X)$. Lad $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ være en mængde af delmængder af X, som opfylder følgende:

(i) Hvis I er en indeksmængde og $U_i \in \mathcal{T}$ for alle $i \in I$, så er også $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

(ii) Hvis $U, V \in \mathcal{T}$, så er $U \cap V \in \mathcal{T}$.

(iii) Vi har både $X \in \mathcal{T}$ og $\varnothing \in \mathcal{T}$.

Så kaldes det ordnede par $(X, \mathcal{T})$ for et *topologisk rum*, og elementerne i $\mathcal{T}$ kaldes *åbne mængder* (i topologien $\mathcal{T}$).

Bemærkning 1.2. Vi knytter nogle kommentarer til definitionen.

1. Det kan vises, at $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n})$, hvor $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n} = \{U \subset \mathbb{R}^n \mid U \text{ er åben i sædvanlig forstand}\}$ udgør et topologisk rum. Se Opgave 2.1 og Eksempel 2.18. Hvis der tales om åbne mængder af $\mathbb{R}^n$ uden angivelse af topologi, er det underforstået, at det er i denne topologi.
2. Det er helt afgørende, at (i) i Definition 1.1 gælder for *vilkårlige* indeksmængder I og ikke blot endelige indeksmængder, se Opgave 1.1.
3. Omvendt: Det ses let ved induktion, at hvis (ii) i Definition 1.1 gælder, så gælder det også, at hvis $U_i \in \mathcal{T}$ for alle $i \in I$, hvor I er en *endelig* indeksmængde, så er $\bigcap_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ (se Opgave 1.2). Denne konklusion holder derimod *ikke*, hvis I ikke er endelig, se Opgave 1.3.
4. Alle mængder X, som består af mindst to punkter, kan have mere end én topologi tilknyttet. Således er både $\mathcal{T}_T = \{X, \varnothing\}$ ("den trivielle topologi") og $\mathcal{T}_D = \mathcal{P}(X)$ ("den diskrete topologi") topologier, uanset hvad X er; og hvis X indeholder mere end ét punkt, er $\mathcal{T}_T \neq \mathcal{T}_D$.[1]

[1] En mængde X kan sågar have flere "naturlige" topologier, som alle kan være i spil samtidigt. I disse situationer vil der ofte være et hieraki mellem topologierne; den ene topologi er "finere" eller "grovere" end den anden: Hvis $\mathcal{T}$ og $\mathcal{T}'$ er topologier på samme rum X og $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$, så siges $\mathcal{T}$ at være grovere end $\mathcal{T}'$, og $\mathcal{T}'$ siges at være finere end $\mathcal{T}$. Dette vil vi dog ikke komme nærmere ind på i dette kursus, bortset fra en enkelt kommentar i forbindelse med kontinuerte funktioner.

For at holde styr på hierakiet af mængder af mængder osv., så omtales $\mathcal{P}(X)$ ofte som *familien* af delmængder af X, ligesom $\mathcal{T}$ ofte omtales som *familien af åbne mængder.*

1.2 Kontinuitet

Som lovet er åbne mængder alt, vi behøver, for at definere kontinuitet:

Definition 1.3 (Kontinuitet)**.** Lad $(X, \mathcal{T}_X)$ og $(Y, \mathcal{T}_Y)$ være topologiske rum, $f\colon X \to Y$ være en funktion. Hvis $U \in \mathcal{T}_Y$ medfører, at $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$, så kaldes f *kontinuert* (i topologierne $\mathcal{T}_X$ og $\mathcal{T}_Y$).

Det ses let, at at hvis Y er udstyret med den trivielle topologi $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_T = \{\varnothing, Y\}$ eller hvis X er udstyret med den diskrete topologi $\mathcal{T}_X = \mathcal{T}_D = \mathcal{P}(X)$, så er alle funktioner $f\colon X \to Y$ kontinuerte, hvilket illustrerer, at disse topologier sjældent er af interesse. Du skal selv bevise dette i Opgave 1.4.[2]

I Opgave 1.5 skal du selv vise, at ovenstående definition er ækvivalent med den sædvanlige definition, når $X = \mathbb{R}^n$ og $Y = \mathbb{R}^m$. Det viser sig at være lidt mere bøvlet, hvis f ikke er defineret på hele $\mathbb{R}^n$. Dette reddes dog af følgende definition.

Definition 1.4 (Sportopologi, relativ åbenhed)**.** Lad $(X, \mathcal{T})$ være et topologisk rum, og lad $A \subset X$. Så kaldes $\mathcal{T}_A = \{U \cap A \,|\, U \in \mathcal{T}\}$ for *sportopologien*, og en mængde $V \subset A$ som opfylder, at $V \in \mathcal{T}_A$ kaldes *relativt åben* (mht. A).

Det er nemt at vise, at $(A, \mathcal{T}_A)$ med A og $\mathcal{T}_A$ som ovenfor udgør et topologisk rum, se Opgave 1.6. Det kan nu vises, at en funktion $f\colon A \to \mathbb{R}^m$, hvor $A \subset \mathbb{R}^n$, er kontinuert i den sædvanlige forstand, hvis og kun hvis den er kontinuert fra $(A, \mathcal{T}_A)$ til $(\mathbb{R}^m, \mathcal{T}_{\mathbb{R}^m})$ ifølge Definition 1.3, hvor $\mathcal{T}_A$ er sportopologien givet ved den sædvanlige topologi på $\mathbb{R}^n$. Se Opgave 1.7.

Bemærk, at vi ikke har defineret kontinuitet i et punkt endnu for afbildninger mellem topologiske rum. Denne definition bygger på følgende begreb.

Definition 1.5 (Omegn)**.** Lad $(X, \mathcal{T})$ være et topologisk rum og $x \in X$. En *omegn omkring* x er en mængde $N \subset X$, som opfylder, at $x \in U \subset N$ for et $U \in \mathcal{T}$.

Specielt er $U \ni x$, hvor $U \in \mathcal{T}$, altså en åben omegn omkring x. Det viser sig ofte, at det er tilstrækkeligt at kigge på åbne omegne.

Definition 1.6 (Kontinuitet i et punkt)**.** Lad $(X, \mathcal{T}_X)$ og $(Y, \mathcal{T}_Y)$ være topologiske rum og $f\colon X \to Y$ være en funktion. Antag, at der for et $x \in X$ gælder, at for enhver omegn U om $f(x)$ er $f^{-1}(U)$ en omegn om x. Så siges f at være kontinuert i x.

Det er let at se, at en funktion er kontinuert, hvis og kun hvis den er kontinuert i alle punkter af definitionsmængden. Se Opgave 1.8.

Vi får senere brug for begrebet tæthed.

[2] Jf. en tidligere fodnote, så taler man om "finere" og "grovere" topologier; med denne sprogbrug er $\mathcal{T}_D$ den fineste topologi (den er finere end alle andre topologier), mens $\mathcal{T}_T$ er den groveste topologi (den er grovere end alle andre topologier). Generelt er en funktion $f\colon X \to Y$, som er kontinuert i topologierne $\mathcal{T}_X$ og $\mathcal{T}_Y$ også kontinuert i alle andre topologier $\mathcal{T}'_X$ og $\mathcal{T}'_Y$, hvis $\mathcal{T}'_X$ er finere end $\mathcal{T}_X$ eller hvis $\mathcal{T}'_Y$ er grovere end $\mathcal{T}_Y$.

Definition 1.7 (Tæthed)**.** En delmængde $A \subset X$ af det topologiske rum $(X, \mathcal{T})$ siges at være *tæt i* X, såfremt det for alle $U \in \mathcal{T} \backslash \{\emptyset\}$ gælder, at $U \cap A \neq \emptyset$.

Begrebet "omegn" indgår ikke direkte i definitionen af tæthed, men det kan bruges til at forklare ordvalget: Lad A være tæt i X. Så vil enhver (selv nok så lille) åben mængde indeholde elementer fra A. Dvs. at ligegyldigt hvad $x \in X$ er, så vil enhver omegn omkring x indeholde et element fra A, så der er altid elementer i A som er "tæt på" x. Et af de vigtigste eksempler på dette er, at $\mathbb{Q}$ er tæt i $\mathbb{R}$ (se også afsnittet om fuldstændighed).

1.3 Konvergens

Dette afsnit er kun en forudsætning for forståelsen af af Definition 1.16, Sætning 2.5 og Afsnit 2.2 samt Opgave 1.9, 1.10, 2.2 og 2.7.

Begrebet omegn kan også bruges til at definere konvergens af en følge.

Definition 1.8 (Konvergens af følger)**.** Lad $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ være en følge af punkter $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, i det topologiske rum $(X, \mathcal{T})$. Hvis $a \in X$ opfylder, at der for enhver omegn $N \ni a$ om a eksisterer et $K \in \mathbb{N}$ så $x_n \in N$ for alle $n \geqslant K$, så siges x_n at *konvergere* mod a for $n \to \infty$.

Advarsel: Det er *ikke* tilfældigt, at skrivemåden $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ *ikke* er benyttet! I denne skrivemåde er det implicit, at grænseværdien af følgen er veldefineret, men i generelle topologiske rum kan det godt hænde, at x_n konvergerer mod både a og b for $n \to \infty$, selvom $a \neq b$! Se eksempelvis Opgave 1.9.

For at sikre, at grænseværdien er entydig, bliver vi nødt til at kræve, at topologien kan skelne punkter på passende vis. Det viser sig, at følgende definition er den rigtige.

Definition 1.9 (Hausdorffrum)**.** Lad $(X, \mathcal{T}_X)$ være et topologisk rum og $a, b \in X$ opfylde, at $a \neq b$. Så siges a og b at være *separeret af omegne*, hvis der findes omegne $N \ni a$ og $M \ni b$, så $N \cap M = \emptyset$. Hvis alle par af forskellige punkter er separeret af omegne, så siges $(X, \mathcal{T})$ at være et *Hausdorffrum*.

Det bemærkes, at det er nok at betragte åbne omegne i ovenstående definition (hvorfor?). Et Hausdorffrum kaldes også et separeret rum eller et T_2-rum.

Sætning 1.10. *Lad $(X, \mathcal{T})$ være et Hausdorffrum. Hvis $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ er en følge af punkter $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, og x_n konvergerer mod a og b for $n \to \infty$, så er $a = b$.*

Bevis. Antag for modstrid at $a \neq b$. Så findes omegne $N \ni a$ og $M \ni b$ så $N \cap M = \emptyset$. Men da x_n konvergerer mod a og b for $n \to \infty$, så findes K_a og K_b, så $x_n \in N$ for $n \geqslant K_a$, og $x_n \in M$ for $n \geqslant K_b$, og dermed er $x_n \in N \cap M = \emptyset$ for $n \geqslant \max\{K_a, K_b\}$. □

Definition 1.11 (Konvergens i Hausdorffrum)**.** Lad $(X, \mathcal{T})$ være et Hausdorffrum og lad $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ være en følge i X som konvergerer mod et $a \in X$ for $n \to \infty$. Så skriver vi $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

1.4 Kompakthed

Definitionen af lukkede mængder i et topologisk rum er som den definition af lukkede mængder, I allerede kender fra $\mathbb{R}^n$:

Definition 1.12 (Lukket mængde)**.** Lad $(X, \mathcal{T})$ være et topologisk rum og $F \subset X$ en delmængde af X. Så kaldes F *lukket*, hvis komplementet er åbent: $F^c := X \backslash F \in \mathcal{T}$.

Jeg har allerede flere gange omtalt lukkede og begrænsede delmængder af $\mathbb{R}^n$ som "kompakte." Vi vil nu præcisere, hvad der menes med en kompakt mængde.

Definition 1.13 (Kompakt mængde)**.** Lad $K \subset X$ være en delmængde af det topologiske rum $(X, \mathcal{T})$.

(i) Hvis $\{U_i\}_{i \in I}$, hvor I er en indeksmængde, opfylder, at $U_i \in \mathcal{T}$ for alle $i \in I$ og $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, så kaldes $\{U_i\}_{i \in I}$ for en *åben overdækning* af K, og $\{U_i\}_{i \in I}$ siges at *overdække* K.

(ii) Hvis $J \subset I$ er en endelig delmængde af I, så kaldes $\{U_i\}_{i \in J}$ for en *endelig udtynding* af $\{U_i\}_{i \in I}$.

(iii) Hvis K opfylder, at der for enhver åben overdækning $\{U_i\}_{i \in I}$ findes en endelig udtynding $\{U_i\}_{i \in J}$, som overdækker K, så kaldes K *kompakt*.

At en lukket og begrænset delmængde af $\mathbb{R}^n$ er kompakt, er et ikke-trivielt resultat, som går under navnet Heine-Borels sætning. Inden vi kommer til Heine-Borels sætning, vil vi vise en meget generel udgave af et resultat, som vi har set i flere afskygninger allerede.

Sætning 1.14. *Lad $(X, \mathcal{T}_X)$ og $(Y, \mathcal{T}_Y)$ være topologiske rum og $f : X \to Y$ være en kontinuert funktion. Hvis $K \subset X$ er kompakt, så er $f(K)$ kompakt. Specielt antager en kontinuert funktion fra et topologisk rum $(X, \mathcal{T}_X)$ ind i $\mathbb{R}$ (udstyret med den sædvanlige topologi) sine ekstremalværdier på kompakte mængder.*

Bevis. Lad $\{U_i\}_{i \in I}$ være en overdækning af $f(K)$. Så er $\{f^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ en overdækning af K (hvorfor? Se Opgave 1.11). Da K er kompakt, kan vi finde en endelig overdækning $\{f^{-1}(U_i)\}_{i \in J}$ af K. Men da $\{f^{-1}(U_i)\}_{i \in J}$ overdækker K, så overdækker $\{U_i\}_{i \in J}$ $f(K)$ (hvorfor? se Opgave 1.12). Altså kan enhver åben overdækning af $f(K)$ udtyndes til en endelig overdækning af $f(K)$. Sidste del af sætningen følger nu af Heine-Borels sætning, Sætning 2.19, som vises nedenfor, idet vi ved, at en lukket og begrænset delmængde af $\mathbb{R}$ indeholder sit supremum og sit infimum. □

Et andet resultat, som knytter lukkethed sammen med kompakthed, er følgende:

Proposition 1.15. *Hvis K er kompakt, og $C \subset K$ er lukket, så er C kompakt.*

Bevis. Antag, at $C \subset K$ er lukket og K er kompakt, og lad $\{U_i\}_{i \in I}$ være en åben overdækning af C. Vi skal vise, at vi kan finde en endelig udtynding, som overdækker C. Men da $\{U_i\}_{i \in I}$ overdækker C og C er lukket, er $\{U_i\}_{i \in I} \cup \{C^c\}$ en åben overdækning af K, som kan udtyndes til en endelig overdækning $\{U_i\}_{i \in J} \cup \{C^c\}$ af K. Da $C \subset K$ vil $\{U_i\}_{i \in J} \cup \{C^c\}$ også overdække C, men da $C^c \cap C = \varnothing$ kan vi fjerne C^c fra den endelige overdækning og stadig have en overdækning af C. Altså har vi nu en endelig udtynding af den oprindelige overdækning og C er dermed kompakt. □

Der findes også et begreb, som hedder følgekompakthed:

Definition 1.16 (Følgekompakthed)**.** Lad $K \subset X$ være en delmængde af det topologiske rum $(X, \mathcal{T})$. Hvis enhver følge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ af punkter $x_n \in K$, $n \in \mathbb{N}$, har en delfølge, som konvergerer mod et grænsepunkt i K, så kaldes K *følgekompakt.*

Det viser sig, at i eksempelvis $\mathbb{R}^n$ er en mængde kompakt, hvis og kun hvis den er følgekompakt. Faktisk gælder det i alle såkaldt *metriske rum.* Vi beviser dette faktum i Afsnit 2.2, men vil ellers ikke benytte os af begrebet følgekompakthed i disse noter.

2 Metriske rum

2.1 Metrik, topologi og kontinuitet

Vi har allerede set er par eksempler på relativt uinteressante topologier, nemlig den trivielle og den diskrete topologi. Det viser sig, at en rigtig stor klasse af interessante topologier (inklusive den, vi kender på $\mathbb{R}^n$) er defineret på samme måde, nemlig vha. en *metrik.*

Definition 2.1 (Metrisk rum)**.** Lad X være en mængde og lad $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ være en funktion som opfylder følgende for alle valg af $x, y, z \in X$:

(i) Troskab: $d(x, y) = 0$ hvis og kun hvis $x = y$.

(ii) Symmetri: $d(x, y) = d(y, x)$.

(iii) Trekantsuligheden: $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$.

Så kaldes d en *metrik* (eller *afstandsfunktion*) og (X, d) kaldes et *metrisk rum.*

Som det alternative navn antyder, så bruges en metrik til at give mening til begrebet *afstand*, og man kan således tænke på $d(x, y)$ som afstanden mellem x og y. Vi husker, at topologien på $\mathbb{R}^n$ var defineret vha. *kugler*; et indre punkt a i en mængde A er et punkt, som opfylder, at der eksisterer et $r > 0$, således at $B_r(a) \subset A$, og en åben mængde er en mængde, der udelukkende består af indre punkter. Denne idé kan genbruges i metriske rum.

Definition 2.2 (Åbne og lukkede kugler)**.** Lad (X, d) være et metrisk rum. For $a \in X$ og $r > 0$ kaldes

$$B_r(a) = \{x \in X \mid d(x, a) < r\}$$

den *åbne kugle omkring a med radius r* og

$$\overline{B_r(a)} = \{x \in X \mid d(x, a) \leqslant r\}$$

den *lukkede kugle omkring a med radius r.*

Definition 2.3 (Topologien induceret af en metrik)**.** Lad (X, d) være et metrisk rum.

(i) Hvis der for et $a \in A \subset X$ gælder, at der eksisterer et $r > 0$, så $B_r(a) \subset A$, så kaldes a et *indre punkt i A.*

(ii) En mængde $U \subset X$ kaldes *åben*, hvis alle elementer $u \in U$ er indre punkter i U.

(iii) Mængden $\mathcal{T}_d = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U \text{ er åben}\}$ kaldes *topologien induceret af metrikken d.*

Sprogbrugen i ovenstående definitioner forsvares af følgende sætning:

Sætning 2.4. *Lad (X, d) være et metrisk rum. Så er $(X, \mathcal{T}_d)$ et topologisk rum, og alle åbne kugler er åbne mens alle lukkede kugler er lukkede mængder i den inducerede topologi.*

Bevis. Opgave 2.1. □

Endvidere gælder følgende sætning, som sikrer entydighed af grænseværdier i metriske rum:

Sætning 2.5. *Lad (X, d) være et metrisk rum, så er $(X, \mathcal{T}_d)$ et Hausdorffrum.*

Bevis. Opgave 2.2. □

Topologien i metriske rum ligner altså på mange måder topologien i $\mathbb{R}^n$, og mange af resultaterne oversættes da også let. Eksempelvis har vi følgende resultat.

Sætning 2.6 (Følgekarakterisation af kontinuitet)**.** *Lad (X, d_X) og (Y, d_Y) være metriske rum. Så er $f: X \to Y$ kontinuert (fra (X, d_X) til (Y, d_Y)) hvis og kun hvis f er følgekontinuert.*

Bemærkning 2.7. Vi knytter et par kommentarer til sætningen.

(i) Hvis $A \subset X$, så er restriktionen $d_X|_A : A \times A \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ af d_X til A en metrik på A og den af metrikken inducerede topologi på A er den samme som sportopologien på A. Se Opgave 2.3. For en kontinuert funktion $f: A \to \mathbb{R}$ hvor $A \subset \mathbb{R}^n$ er der altså tale om den sædvanlige form for kontinuitet, jf. Opgave 1.7.

(ii) Det er ikke en fejl, at vi ikke har defineret følgekontinuitet på metriske rum. Det skal du nemlig selv gøre i Opgave 2.4.

Bevis for Sætning 2.6. Opgave 2.5. □

Inden vi viser Heine-Borels sætning, så viser vi først et resultat, som svarer til den ene implikation i Heine-Borels sætning, og som gælder generelt i metriske rum. Allerførst skal vi dog lige have styr på, hvad begrænsethed i et metrisk rum er.

Definition 2.8 (Begrænsethed)**.** Lad (X, d) være et metrisk rum og $A \subset X$. Hvis der eksisterer et $a \in X$ og et $R \in \mathbb{R}$ så $B_R(a) \supset A$, så kaldes A begrænset.

Vha. trekantsuligheden ses det let, at det er ligegyldigt, hvilket $a \in X$ vi vælger; vi skal blot justere R på passende vis.

Sætning 2.9. *Lad (X, d) være et metrisk rum. Hvis $K \subset X$ er kompakt, så er K lukket og begrænset.*

Bevis. Først vises, at K er lukket. Antag for modstrid, at K ikke er lukket; så er K^{C} ikke åben. Så eksisterer et punkt $a \in K^{\mathrm{C}}$ som ikke er et indre punkt. Dvs. at for ethvert $n \in \mathbb{N}$ er $\overline{B_{\frac{1}{n}}(a)} \cap K \neq \varnothing$ (hvorfor?). Da $a \notin K$ er

$$\left\{ \overline{B_{\frac{1}{n}}(a)}^{\mathrm{C}} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

en åben overdækning af K. Men da $\overline{B_{\frac{1}{n}}(a)} \cap K \neq \varnothing$ kan den ikke udtyndes til en endelig overdækning (hvorfor?).

Lad $K \subset X$ være kompakt og $a \in X$. Da $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(a)$, så findes en endelig udtynding af $\{B_n(a)\}_{n=1}^{\infty}$, så $K \subset \bigcup_{i \in J} B_{n_i}(a) = B_{\max\{n_i | i \in J\}}(a)$. Altså er K begrænset. □

2.2 Følgekompakthed er kompakthed

Dette afsnit er ikke nødvendigt for forståelsen af de andre afsnit, til gengæld overflødiggør det beviset for Heine-Borels Sætning i Afsnit 2.3.

For at vise ækvivalensen af kompakthed og følgekompakthed får vi brug for begrebet *fortætningspunkt*.

Definition 2.10 (Fortætningspunkt)**.** Lad (X, d) være et metrisk rum, $a \in X$, og lad $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ være en følge af punkter $x_n \in X$. Hvis der for ethvert $r > 0$ og ethvert $N \in \mathbb{N}$ eksisterer et $n \geqslant N$ så $x_n \in B_r(a)$, så kaldes a et *fortætningspunkt* for $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Lemma 2.11. *Lad $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ være en følge i det metriske rum (X, d) og lad $a \in X$ være et fortætningspunkt for $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Så findes en delfølge $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ så $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.*

Bevis. Vi definerer n_k på følgende måde: Lad $n_0 = 1$. For $k \in \mathbb{N}$ defineres n_k rekursivt ved at sætte $r = \frac{1}{k}$ og $N = n_{k-1} + 1$ og lade $n_k = n$ være et $n \geqslant N$ som opfylder, at $x_n \in B_r(a)$. Så er $n_{k+1} > n_k$ og $x_{n_k} \in B_{\frac{1}{k}}(a)$, og $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ er således en delfølge, som konvergerer mod a. □

Omend vil ikke skal bruge det, er det værd at bemærke, at der omvendt også gælder:

Proposition 2.12. *Lad $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ være en følge i det metriske rum (X, d) og lad $a \in X$. Antag, at der eksisterer en delfølge $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, så $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. Så er a et fortætningspunkt for $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Bevis. Lad $r > 0$ og $N \in \mathbb{N}$ være givet. Da $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$ eksisterer et $K \in \mathbb{N}$, så $k \geqslant K$ medfører, at $x_{n_k} \in B_r(a)$. Sæt $M = \max\{N, K\}$. Så er $n_M \geqslant N$ og $x_{n_M} \in B_r(a)$. □

Sætning 2.13 (Ækvivalens af kompakthed og følgekompakthed i metriske rum)**.** *Lad (X, d) være et metrisk rum og $K \subset X$ en delmængde. Så er K kompakt hvis og kun hvis K er følgekompakt.*

Bevis for, at kompakthed medfører følgekompakthed. Antag for modstrid, at K er kompakt, men at der eksisterer en følge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ af punkter $a_n \in K$ som ikke har en delfølge, der konvergerer mod et punkt i K. Lad $A = \{a_n \in K \mid n \in \mathbb{N}\}$. Lemma 2.11 giver, at intet element i K er et fortætningspunkt for $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. For alle $x \in K$ eksisterer derfor et $r_x > 0$, så $B_{r_x}(x) \cap A$ kun indeholder endeligt mange punkter. Men da $\bigcup_{x\in X} B_{r_x} \supset K$ er en åben overdækning af K, kan vi finde en endelig udtynding $\bigcup_{i=1}^n B_{r_{x_i}}(x_i) \supset K \supset A$, som overdækker K. Men da hver af mængderne $B_{r_{x_i}}(x_i) \cap A$ kun indeholder endeligt mange punkter, vil $\bigcup_{i=1}^n B_{r_{x_i}}(x_i) \cap A = A$ også kun indeholde endeligt mange punkter, og dermed antager a_n'erne kun endeligt mange værdier, og mindst én af disse værdier må antages uendeligt mange gange og derfor være et fortætningspunkt for $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, i modstrid med antagelserne. □

Den anden vej er lidt mere besværlig. Vi har brug for to resultater, som vi formulerer som lemmaer. Bemærk i øvrigt ligheden med Lemma 2.20 og 2.21, og deres rolle i beviset for Heine-Borels Sætning.

Lemma 2.14. *Antag, at (X, d) er et metrisk rum og at $K \subset X$ er følgekompakt. Lad $\{U_i\}_{i\in I}$ være en åben overdækning af K. Så findes der et $r > 0$, så der for ethvert $x \in K$ eksisterer et $i_x \in I$ så $B_r(x) \subset U_{i_x}$.*

Bevis. Antag for modstrid, at der for alle $r > 0$ eksisterer et $x_r \in K$ så der for alle $i \in I$ gælder, at $B_r(x_r) \not\subset U_i$. Specielt kan vi vælge $r = \frac{1}{n}$ og få en følge $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, hvor $x_n = x_{\frac{1}{n}}$ er det x_r, $r = \frac{1}{n}$, der eksisterer ifølge antagelsen. Da K er følgekompakt, eksisterer der en konvergent delfølge $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ med grænse $x_\infty := \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in K$. Da $\{U_i\}_{i\in I}$ er en åben overdækning af K, eksisterer der altså et $i_\infty \in I$ og et $r > 0$ så $x_\infty \in B_r(x_\infty) \subset U_{i_\infty}$. Vælg nu $N \in \mathbb{N}$ så $\frac{1}{n_N} < \frac{r}{2}$ og så $k \geqslant N$ medfører, at $\|x_{n_k} - x_\infty\| < \frac{r}{2}$. Så giver trekantsuligheden, at

$$B_{\frac{1}{n_N}}(x_{n_N}) \subset B_{\frac{r}{2}}(x_{n_N}) \subset B_r(x_\infty) \subset U_{i_\infty},$$

i modstrid med antagelsen om, at $B_{\frac{1}{n_N}}(x_{n_N}) \not\subset U_i$ for alle $i \in I$. □

Lemma 2.15. *Antag, at (X, d) er et metrisk rum, at $K \subset X$ er følgekompakt og at $r > 0$. Så findes der endeligt mange punkter $\{x_k\}_{k=1}^n$, hvor $x_k \in K$, så $\bigcup_{k=1}^n B_r(x_k) \supset K$.*

Bevis. Igen er beviset et modstridsbevis. Antag altså for modstrid, at $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ er en følge i K, som opfylder, at $x_n \notin \bigcup_{k=1}^{n-1} B_r(x_k)$, så

$$\|x_n - x_k\| \geqslant r \quad \text{for} \quad k = 1, \ldots, n-1. \tag{1}$$

Da K er følgekompakt, eksisterer der en konvergent delfølge $\{x_{n_j}\}_{j=1}^\infty$, men dette er i modstrid med (1), da en konvergent følge specielt skal være en Cauchy-følge og elementerne derfor nærme sig hinanden (se Opgave 2.7). □

Det er nu nemt at bevise at følgekompakthed medfører kompakthed:

Resten af beviset for Sætning 2.13. Lad $K \subset \mathbb{R}^n$ være følgekompakt og lad $\{U_i\}_{i\in I}$ være en åben overdækning af K. Så eksisterer ifølge Lemma 2.14 et $r > 0$ så der for ethvert $x \in K$ eksisterer et $i_x \in I$, så $B_r(x) \subset U_{i_x}$. Ifølge Lemma 2.15 kan vi så vælge endeligt mange x_k'er, så

$$K \subset \bigcup_{k=1}^n B_r(x_k) \subset \bigcup_{k=1}^n U_{i_{x_k}},$$

som altså er en endelig udtynding, som overdækker K. □

Bemærk, at sidste del af beviset for Sætning 2.13 sammen med Sætning 2.9 faktisk gør det ud for et bevis for Heine-Borels Sætning, idet Bolzano-Weierstrass' egenskab netop siger, at en lukket og begrænset delmængde af $\mathbb{R}^n$ er følgekompakt.

2.3 Normerede vektorrum

Afstandsfunktionen i $\mathbb{R}^n$ har meget mere struktur end blot de tre punkter i Definition 2.1. Dette hænger sammen med, at $\mathbb{R}^n$ er et såkaldt *normeret vektorrum.*

Definition 2.16 (Normeret vektorrum)**.** Lad V være et vektorrum over legemet $\mathbb{K}$, hvor $\mathbb{K}$ enten er $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, og $N\colon V \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ være en funktion som opfylder følgende for alle $x, y \in V$ og $a \in \mathbb{K}$:

(i) Troskab: $N(x) = 0$ hvis og kun hvis $x = 0$

(ii) Homogenitet: $N(ax) = |a|N(x)$

(iii) Subadditivitet: $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$

Så kaldes funktionen N for en *norm* og (V, N) kaldes et *normeret vektorrum.* Funktionen $d_N\colon V \times V \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ givet ved $d_N(x, y) = N(x - y)$ kaldes *metrikken induceret af* N.

Som før kræver noget af sprogbrugen et forsvar:

Sætning 2.17. *Lad (V, N) være et normeret vektorrum. Så er (V, d_N) et metrisk rum.*

Bevis. Opgave 2.6. □

Eksempel 2.18. Det ses let, at $x \mapsto \|x\|$ er en norm på $\mathbb{R}^n$, og dermed er $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ et normeret vektorrum og den inducerede metrik $d_{\|\cdot\|}\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ er en metrik og $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{d_{\|\cdot\|}})$ er et topologisk rum med den inducerede topologi.

Nu, hvor vi har fået introduceret topologien på $\mathbb{R}^n$, er vi klar til at vise Heine-Borels sætning:

Sætning 2.19 (Heine-Borels sætning)**.** *En delmængde af $\mathbb{R}^n$ udstyret med den sædvanlige topologi er kompakt hvis og kun hvis den er lukket og begrænset.*

Sætning 2.9 giver os "kun hvis"-delen, og vi skal således blot bevise, at en lukket og begrænset mængde i $\mathbb{R}^n$ er kompakt. Beviset bygger på to resultater, som vi formulerer som lemmaer.

Lemma 2.20. *Hvis $K \subset \mathbb{R}^n$ er lukket og begrænset og $\{U_i\}_{i\in I}$ er en åben overdækning af K, så findes der et $r > 0$ så der for ethvert $x \in K$ eksisterer et $i_x \in I$ så $B_r(x) \subset U_{i_x}$.*

Bevis. Antag for modstrid, at der for alle $r > 0$ eksisterer et $x_r \in K$ så der for alle $i \in I$ gælder, at $B_r(x_r) \not\subset U_i$. Specielt kan vi vælge $r = \frac{1}{n}$ og få en følge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, hvor $x_n = x_{\frac{1}{n}}$ er det x_r, $r = \frac{1}{n}$, der eksisterer ifølge antagelsen. Ifølge Bolzano-Weierstrass' egenskab (bogens Korollar 6.14) eksisterer der en konvergent delfølge $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ med grænse $x_\infty := \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in K$. Da $\{U_i\}_{i\in I}$ er en åben overdækning af K, eksisterer der altså et

$i_\infty \in I$ og et $r > 0$ så $x_\infty \in B_r(x_\infty) \subset U_{i_\infty}$. Vælg nu $N \in \mathbb{N}$ så $\frac{1}{n_N} < \frac{r}{2}$ og så $k \geqslant N$ medfører, at $\|x_{n_k} - x_\infty\| < \frac{r}{2}$. Så giver trekantsuligheden, at

$$B_{\frac{1}{n_N}}(x_{n_N}) \subset B_{\frac{r}{2}}(x_{n_N}) \subset B_r(x_\infty) \subset U_{i_\infty},$$

i modstrid med antagelsen om, at $B_{\frac{1}{n_N}}(x_{n_N}) \not\subset U_i$ for alle $i \in I$. □

Lemma 2.21. *Hvis $K \subset \mathbb{R}^n$ er begrænset og $r > 0$, så findes der endeligt mange punkter $\{x_k\}_{k=1}^n$, hvor $x_k \in K$, så $\bigcup_{k=1}^n B_r(x_k) \supset K$.*

Bevis. Igen er beviset et modstridsbevis, denne gang baseret på Bolzano-Weierstrass' sætning. Antag for modstrid, at $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ er en følge i K, som opfylder, at $x_n \notin \bigcup_{k=1}^{n-1} B_r(x_k)$, så

$$\|x_n - x_k\| \geqslant r \quad \text{for} \quad k = 1, \dots, n-1. \tag{2}$$

Da K er begrænset, eksisterer der ifølge Bolzano-Weierstrass' sætning (Sætning 6.7 i bogen) en konvergent delfølge $\{x_{n_j}\}_{j=1}^\infty$, men dette er i modstrid med (2), da en konvergent følge specielt skal være en Cauchy-følge og elementerne derfor nærme sig hinanden. □

Det er nu nemt at bevise Heine-Borels sætning:

Bevis for Sætning 2.19. Lad $K \subset \mathbb{R}^n$ være lukket og begrænset og lad $\{U_i\}_{i \in I}$ være en åben overdækning af K. Så eksisterer ifølge Lemma 2.20 et $r > 0$ så der for ethvert $x \in K$ eksisterer et $i_x \in I$, så $B_r(x) \subset U_{i_x}$. Ifølge Lemma 2.21 kan vi så vælge endeligt mange x_k'er, så

$$K \subset \bigcup_{k=1}^n B_r(x_k) \subset \bigcup_{k=1}^n U_{i_{x_k}},$$

som altså er en endelig udtynding, som overdækker K. □

3 Fuldstændighed

3.1 Fuldstændighed af metriske rum

Vi har tidligere i kurset påstået, at vi kunne have erstattet supremumsegenskaben med konvergens af Cauchy-følger, idet begge dele er mulige formuleringer af de reelle tals fuldstændighed. I metriske rum har man ikke nødvendigvis en ordning, og dermed giver supremumsegenskaben ikke nødvendigvis mening. Det er dog nemt at definere Cauchy-følger og konvergens i metriske rum:

Definition 3.1 (Cauchy-følge)**.** Lad (X, d) være et metrisk rum og $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ en følge af elementer i X. Antag følgende:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \colon m, n \geqslant N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Så kaldes $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ en *Cauchy-følge* i X.

Definition 3.2 (Konvergens)**.** Lad (X, d) være et metrisk rum, $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ en følge af elementer i X og $a \in X$. Antag følgende:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \colon n \geqslant N \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon.$$

Så siges $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ at *konvergere mod* a i X.

Se i øvrigt Opgave 2.7. Vi kan nu definere fuldstændighed af metriske rum:

Definition 3.3 (Fuldstændighed)**.** Lad (X, d) være et metrisk rum. Hvis enhver Cauchy-følge i X konvergerer i X, så kaldes X *fuldstændigt.* Hvis (V, N) er et normeret vektorrum, så kaldes V fuldstændigt, hvis det metriske rum (V, d_N) er fuldstændigt.

Bogens Sætning 4.42 fortæller os, at supremumsegenskaben i $\mathbb{R}$ medfører, at enhver Cauchy-følge er konvergent (fuldstændighed). Vi skylder at vise, at vi i stedet kunne have antaget, at enhver Cauchy-følge er konvergent (fuldstændighed), og vist, at det medfører supremumsegenskaben.

Sætning 3.4 (Fuldstændighed af $\mathbb{R}$)**.** *Antag, at K er et ordnet legeme, som er fuldstændigt og som opfylder, at for ethvert $k \in K$ eksisterer et $n \in \mathbb{N}$ så $k < n$. Så er $K = \mathbb{R}$.*

Bemærkning 3.5. At der for ethvert $k \in K$ skal eksistere et $n \in \mathbb{N}$, så $k < n$, var det, vi også kaldte Arkimedes' princip. Vi har set, at supremumsegenskaben medfører Arkimedes' princip. Her bliver vi imidlertid nødt til at antage, at Arkimedes' princip gælder, fordi supremumsegenskaben (også kendt som Dedekind-fuldstændighed) er en stærkere formulering af de reelle tals fuldstændighed end den fuldstændighed, som er formuleret i Definition 3.3. Da vi normalt tænker på $\mathbb{R}$ som værende $\mathbb{Q}$ med alle huller fyldt ud, så er det ikke nogen unaturlig antagelse at Arkimedes' princip gælder, da det oplagt gælder for $\mathbb{Q}$, og ethvert reelt tal altså kan approksimeres vilkårligt godt med et rationelt. Det er også netop den idé, der ligger bag beviset for eksistensen af de reelle tal, se Sætning 3.34.

Bevis for Sætning 3.4. De reelle tal $\mathbb{R}$ er defineret som et ordnet legeme, som opfylder supremumsegenskaben. Vi skal med andre ord blot vise, at antagelserne sikrer, at enhver ikke-tom, opadtil begrænset delmængde af K har en mindste øvre grænse.

Lad derfor $S \subset K$ være ikke-tom og opadtil begrænset. Så eksisterer der en øvre grænse $b \in K$ og et element $a \in S$. Arkimedes' princip sikrer, at der eksisterer $-m, M \in \mathbb{N}$, så $m < a \leqslant b < M$. Hvis vi for ethvert $k \in \mathbb{N}$ definerer

$$T_k = \{p \in \mathbb{Z} \mid p \leqslant 2^k M \quad \text{og} \quad \tfrac{p}{2^k} \text{ er en øvre grænse for } S\}$$

så er T_k nedadtil begrænset af $m2^k$, opadtil begrænset af $2^k M$, og ikke-tom, da $2^k M \in T_k$. Som ikke-tom, begrænset delmængde af $\mathbb{Z}$ har T_k altså et mindste element, $p_k = \min T_k$. Pr. konstruktion er $a_k = \frac{p_k}{2^k}$ en øvre grænse for S, mens $\frac{p_k - 1}{2^k}$ ikke er en øvre grænse for S. Dette medfører, at

$$\frac{p_k - 1}{2^k} = \frac{2p_k - 2}{2^{k+1}} < a_{k+1} = \frac{p_{k+1}}{2^{k+1}} \leqslant \frac{2p_k}{2^{k+1}} = a_k.$$

Da p_{k+1} er et helt tal, må der altså enten gælde $p_{k+1} = 2p_k - 1$ eller $p_{k+1} = 2p_k$, og dermed

$$0 \leqslant a_k - a_{k+1} \leqslant \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Lad nu $m > n \geqslant 1$. Så er

$$\begin{aligned} 0 \leqslant a_n - a_m &= (a_n - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_{n+2}) + \cdots + (a_{m-2} - a_{m-1}) + (a_{m-1} - a_m) \\ &\leqslant \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^m} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \cdots + \frac{1}{2^{m-n-2}} + \frac{1}{2^{m-n-1}}\right) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{\frac{1}{2^{m-n-1+1}} - 1}{\frac{1}{2} - 1}\right) = \frac{1}{2^{n+1}}\left(2 - \frac{1}{2^{m-n-1}}\right) < \frac{1}{2^n}, \end{aligned}$$

og dermed er $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ en Cauchy-følge, som pr. antagelse konvergerer: $s = \lim_{k\to\infty} a_k$. Påstanden er nu, at $s = \sup S$. For at se dette, viser vi, at ikke kan have at s ikke er en øvre grænse, og at der ikke findes en øvre grænse, som er mindre end s.

Antag altså først for modstrid, at s ikke er en øvre grænse. Så er der et $x \in S$, så $s < x$. Lad $\varepsilon = x - s > 0$ og find k, så $x - s = \varepsilon > |a_k - s| = a_k - s$, hvor sidste lighedstegn gælder, fordi $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ er en aftagende følge. Så er $x > a_k$, i modstrid med, at a_k er en øvre grænse.

Antag nu for modstrid, at der findes en øvre grænse $s' < s$. Find nu k, så $\frac{1}{2^k} < s - s'$. Så er $s' < s - \frac{1}{2^k} \leqslant a_k - \frac{1}{2^k}$, og dermed er $a_k - \frac{1}{2^k} = \frac{p_k - 1}{2^k}$ en øvre grænse for S, i modstrid med, at p_k er mindste element i T_k. $\square$

Det viser sig, at fuldstændige, normerede vektorrum spiller en så central rolle, at de har gjort sig fortjent til et navn.

Definition 3.6 (Banach-rum)**.** Lad (V, N) betegne et normeret vektorrum over legemet $\mathbb{K}$, hvor $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Hvis V er fuldstændigt, så kaldes V et *Banach-rum*.

Banach-rum har en masse rare egenskaber, som vi vil se nærmere på i Analyse 2. Alle metriske rum (og dermed alle normerede vektorrum) kan *fuldstændiggøres*, hvor en fuldstændiggørelse er som defineret nedenfor.

Definition 3.7 (Fuldstændiggørelse)**.** Lad (X, d) og $(\bar{X}, \bar{d})$ være to metriske rum. Lad $i\colon X \to \bar{X}$ være en funktion, som opfylder følgende:

(i) Isometri: $d(x, y) = \bar{d}(i(x), i(y))$ for alle $x, y \in X$.

(ii) Fuldstændighed: $\bar{X}$ er fuldstændigt.

(iii) Tæthed: $i(X)$ er tæt i $\bar{X}$.

Så kaldes $\bar{X}$ en *fuldstændiggørelse* af X.

Bemærkning 3.8. Isometriegenskaben sikrer, at (X, d) og $(i(X), \bar{d})$ betragtet som metriske rum har præcis de samme egenskaber. Vi kan således betragte $i(X) \subset \bar{X}$ som en kopi af X, der ligger indeni $\bar{X}$. Fuldstændigheden sikrer, at hvis $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ er en Cauchy-følge i X, så er $\{i(x_n)\}_{n=1}^\infty$ konvergent i $\bar{X}$. Tætheden sikrer, at vi ikke "får tilføjet for mange elementer," når vi "udvider X med $\bar{X} \backslash i(X)$." Således er $\mathbb{R}$ en fuldstændiggørelse af $\mathbb{Q}$, mens $\mathbb{C}$ er "for stor;" $\mathbb{Q}$ er ikke tæt i $\mathbb{C}$. Se også Opgave 3.1.

Følgende meget naturlige resultater er en forudsætning for, at fuldstændiggørelsen fungerer (se i øvrigt Sætning 1.10 og 2.5).

Sætning 3.9 (Entydighed af grænseværdi)**.** *Lad (X, d) være et metrisk rum og $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ være en følge i X. Så har $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ højst én grænseværdi.*

Bevis. Opgave 2.8. □

Sætning 3.10 (Konvergente følger er Cauchy-følger)**.** *Lad (X, d) være et metrisk rum og $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ være en konvergent følge i X. Så er $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en Cauchy-følge.*

Bevis. Opgave 2.9. □

3.2 Fuldstændiggørelse af et metrisk rum

I det følgende vil vi betragte et fast metrisk rum (X, d), som vi vil fuldstændiggøre. Idéen er, at hvis vi har en Cauchy-følge, som ikke konvergerer, så opfinder vi bare et element, som repræsenterer denne grænse. Én måde at lave et sådant element er at lade Cauchy-følgen selv repræsentere det manglende element. Et punkt $x \in X$ kan så repræsenteres af den konstante følge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ hvor $x_n = x$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Problemet med dette er, at flere Cauchy-følger kan konvergere mod det samme punkt. For at håndtere denne problematik indføres følgende begreb:

Definition 3.11 (Ækvivalens af Cauchy-følger i metriske rum)**.** Lad (X, d) være et metrisk rum og $\alpha = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ og $\beta = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ være to Cauchy-følger i X. Så siges α og β at være *ækvivalente* såfremt $d(x_n, y_n) \to 0$ for $n \to \infty$ og vi skriver $\alpha \sim \beta$.

Ordvalget indikerer, at der er tale om en *ækvivalensrelation*, et begreb vi for fuldstændighedens[3] skyld lige genopfrisker.

Definition 3.12 (Ækvivalensrelation, ækvivalensklasse)**.** En *ækvivalensrelation* $\approx$ på en mængde Y er en relation, som opfylder følgende for alle $x, y, z \in Y$:

(i) Refleksivitet: $x \approx x$.

(ii) Symmetri: $y \approx x$ hvis $x \approx y$.

(iii) Transitivitet: $x \approx y$ og $y \approx z$ medfører, at $x \approx z$.

Hvis $x \in Y$, så kaldes mængden $[x]_{\approx} = \{y \in Y \mid y \approx x\}$ for *ækvivalensklassen* for x, mens mængden $Y/{\approx} = \{[x]_{\approx} \mid x \in Y\}$ af ækvivalensklasser kaldes *kvotientrummet* af Y mht. $\approx$.

Vi viser først, at $\sim$ er en ækvivalensrelation på mængden af Cauchy-følger i X.

Proposition 3.13. *Lad $C(X)$ betegne mængden af Cauchy-følger i X og lad $\alpha, \beta \in C(X)$. Hvis vi skriver $\alpha \sim \beta$, hvis α og β er ækvivalente (se Definition 3.11), så er $\sim$ en ækvivalensrelation.*

[3] Ordspil tilsigtet.

Bevis. Lad $\alpha, \beta, \gamma \in C(X)$ være Cauchy-følger i X som vi kan skrive som $\alpha = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\beta = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ og $\gamma = \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. Vi skal vise, at $\sim$ er refleksiv. Da $d(x_n, x_n) = 0$ for alle n, så er $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_n) = 0$ og altså er $\alpha \sim \alpha$. For at se, at $\sim$ er symmetrisk, bemærker vi, at $d(x_n, y_n) = d(y_n, x_n)$. At $\sim$ er transitiv, følger af at $d(x_n, z_n) \leqslant d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)$, så hvis $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ og $\lim_{n\to\infty} d(y_n, z_n) = 0$ så er også $\lim_{n\to\infty} d(x_n, z_n) = 0$. $\square$

Da $\sim$ altså er en ækvivalensrelation, kan vi danne kvotientrummet $C(X)/\sim$. Fordelen ved dette rum er altså, at hvis vi har to konvergente Cauchy-følger, som konvergerer mod samme punkt, så tilhører de samme ækvivalensklasse, og dermed samme element i $C(X)/\sim$. Det skal vise sig, at $C(X)/\sim$ udstyret med en passende metrik er en fuldstændiggørelse af X. Lad os derfor fra nu af skrive $\bar{X} = C(X)/\sim$.

Proposition 3.14. *Der eksisterer en metrik $\bar{d}$ på $\bar{X} = C(X)/\sim$ så $(\bar{X}, \bar{d})$ er et metrisk rum og så afbildningen $i\colon X \ni x \mapsto [\{x\}_{n=1}^{\infty}]_{\sim} \in \bar{X}$ er isometrisk, hvor $\{x\}_{n=1}^{\infty}$ betegner den konstante Cauchy-følge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n = x$ for alle $n \in \mathbb{N}$.*

Bevis. Lad $[\alpha]_{\sim}, [\beta]_{\sim} \in \bar{X}$, hvor altså $\alpha = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ og $\beta = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ er Cauchy-følger i X. Hvis $\alpha \sim \beta$, så er $[\alpha]_{\sim} = [\beta]_{\sim}$ og da en metrik $\bar{d}$ skal være tro, må altså $\bar{d}([\alpha]_{\sim}, [\beta]_{\sim}) = 0$. Samtidig ønsker vi, at hvis $x, y \in X$ og $\alpha = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, og $\beta = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ er de konstante følger givet ved $x_n = x$ og $y_n = y$ for alle $n \in \mathbb{N}$, så skal $\bar{d}([\alpha]_{\sim}, [\beta]_{\sim}) = d(x, y)$. I begge tilfælde har vi, at $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ opfylder kravet: Hvis $\alpha \sim \beta$, så er $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ og hvis $x_n = x$ og $y_n = y$, så er $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$.

Hvis vi kan vise, at $\bar{d}([\alpha]_{\sim}, [\beta]_{\sim}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ definerer en metrik, opfylder den altså isometriegenskaben, som kræves af en fuldstændiggørelse. Inden vi tjekker, at kravene til en metrik er opfyldt, skal vi være sikre på, at $\bar{d}$ er *veldefineret*; $[\alpha]_{\sim}, [\beta]_{\sim} \in \bar{X}$ er givet som ækvivalensklasserne for Cauchy-følgerne $\alpha = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ og $\beta = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ i X, og vi skal være sikre på, at hvis $\alpha' = \{x_n'\}_{n=1}^{\infty}$ og $\beta' = \{y_n'\}_{n=1}^{\infty}$ opfylder, at $\alpha \sim \alpha'$ og $\beta \sim \beta'$, så skal $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_n', y_n')$.

Vi viser, at hvis $\alpha \sim \alpha'$, så er $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_n', y_n)$. At grænserne i det hele taget eksisterer, følger af, at

$$\begin{aligned} |d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| &= |d(x_n, y_n) - d(y_n, x_m) + d(y_n, x_m) - d(x_m, y_m)| \\ &\leqslant d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m), \end{aligned}$$

så $\{d(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ er en Cauchy-følge i $\mathbb{R}$ og dermed konvergent. Bemærk, at

$$d(x_n', y_n) \leqslant d(x_n', x_n) + d(x_n, y_n)$$

og

$$d(x_n, y_n) \leqslant d(x_n, x_n') + d(x_n', y_n)$$

så

$$d(x_n, y_n) - d(x_n, x_n') \leqslant d(x_n', y_n) \leqslant d(x_n', x_n) + d(x_n, y_n).$$

Resultatet følger ved at tage grænseværdien for n gående mod uendelig alle steder. Beviset for, at $\lim_{n\to\infty} d(x_n', y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_n', y_n')$ går på præcis samme måde, og altså er $\bar{d}$ veldefineret.

Nu da vi har vist, at $\bar{d}$ er veldefineret, skal vi blot vise, at det er en metrik. Da $d(x_n, y_n) = 0$ medfører, at $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, er $\bar{d}$ tro. Desuden er $d(x_n, y_n) = d(y_n, x_n)$, som giver symmetrien, og $d(x_n, y_n) \leqslant d(x_n, z_n) + d(z_n, y_n)$, og dermed også trekantsuligheden etableret. $\square$

Sætning 3.15. *Lad (X, d) være et metrisk rum. Så er $(\bar{X}, \bar{d})$ givet ved $\bar{X} = C(X)/\sim$ og $\bar{d}(\alpha, \beta) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ for $\alpha = [\{x_n\}_{n=1}^{\infty}]_\sim$ og $\beta = [\{x_n\}_{n=1}^{\infty}]_\sim$ en fuldstændiggørelse af det metriske rum (X, d) via identifikationen $i\colon X \ni x \mapsto [\{x\}_{n=1}^{\infty}]_\sim \in \bar{X}$.*

Bevis. Vi har allerede fra (beviset for) Proposition 3.14 at i er en isometri. Vi viser nu, at $i(X)$ er tæt i $\bar{X}$. Lad $\alpha = [\{x_n\}_{n=1}^{\infty}]_\sim \in \bar{X}$. Så er $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en Cauchy-følge i X og $\bar{d}(\alpha, i(x_m)) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_m)$. Da $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ er en Cauchy-følge, kan vi for $\varepsilon > 0$ finde et $m \in \mathbb{N}$ så $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_m) = \bar{d}(\alpha, i(x_m)) < \varepsilon$. Der er således x_m'er i enhver selv nok så lille $\bar{d}$-kugle omkring α og dermed er $i(X)$ tæt i $\bar{X}$.

Vi mangler nu blot at vise, at $(\bar{X}, \bar{d})$ er fuldstændigt. Lad derfor $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ være en Cauchy-følge i $\bar{X}$. Da $i(X)$ er tæt i $\bar{X}$ kan vi for ethvert α_n finde et $x_n \in X$, så $\bar{d}(\alpha_n, i(x_n)) < \frac{1}{3n}$. Lad $\varepsilon > 0$ være givet og lad $N \in \mathbb{N}$ opfylde, at $m, n \geqslant N$ medfører, at $\bar{d}(\alpha_n, \alpha_m) < \frac{\varepsilon}{3}$ og $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Så er også

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= \bar{d}(i(x_n), i(x_m)) \\ &\leqslant \bar{d}(i(x_n), \alpha_n) + \bar{d}(\alpha_n, \alpha_m) + \bar{d}(\alpha_m, i(x_m)) < \varepsilon, \end{aligned}$$

og $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ er altså en Cauchy-følge i X. Dermed er $\alpha_\infty := [\{x_n\}_{n=1}^{\infty}]_\sim \in \bar{X}$, så hvis vi kan vise, at $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerer mod α_∞, er vi færdige. Betragt derfor

$$\bar{d}(\alpha_n, \alpha_\infty) \leqslant \bar{d}(\alpha_n, i(x_n)) + \bar{d}(i(x_n), \alpha_\infty) < \frac{1}{3n} + \lim_{k\to\infty} d(x_n, x_k),$$

som oplagt går mod 0 for $n \to \infty$, da $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ er en Cauchy-følge. □

3.3 Konstruktion af de reelle tal

Man kunne nu foranlediges til at tro, at vi blot kan fuldstændiggøre det metriske rum $(\mathbb{Q}, d_{\|\cdot\|})$ og dermed konstruere $\mathbb{R}$. Vi risikerer dog at blive anklaget for snyd i form af et cirkulært argument; både definitionen af metriske rum og definitionen af normerede vektorrum var baseret på en funktion, som antog værdier i $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$, og hvad værre er, vi benyttede de reelle tals fuldstændighed i beviset for Proposition 3.14. Vi skylder således at gøre rede for, at vi kan klare os uden.

Vi begynder med nogle grundlæggende definitioner, som er stort set magen til nogle definitioner, vi kender fra bogen.

Definition 3.16 (Grænseværdi i $\mathbb{Q}$)**.** Lad $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ med $q_n \in \mathbb{Q}$ for $n \in \mathbb{N}$ være en følge af rationelle tal. Hvis $\mathbb{Q}_+ = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\}$ betegner mængden af positive, rationelle tal og der findes et $q_\infty \in \mathbb{Q}$ så

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+ \exists N \in \mathbb{N}\colon n \geqslant N \Rightarrow |q_n - q_\infty| < \varepsilon,$$

så siges følgen $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ at konvergere mod q_∞ i $\mathbb{Q}$ for $n \to \infty$.

Definition 3.17 (Cauchy-følge i $\mathbb{Q}$)**.** Lad $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ med $q_n \in \mathbb{Q}$ for $n \in \mathbb{N}$ være en følge af rationelle tal. Hvis $\mathbb{Q}_+ = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\}$ betegner mængden af positive, rationelle tal og

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+ \exists N \in \mathbb{N}\colon m, n \geqslant N \Rightarrow |q_n - q_m| < \varepsilon,$$

så siges følgen at være en Cauchy-følge i $\mathbb{Q}$.

Vi kan nu definere en ækvivalensrelation på mængden af Cauchy-følger i $\mathbb{Q}$.

Definition 3.18 (Ækvivalens af Cauchy-følger i $\mathbb{Q}$)**.** Lad $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ og $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ være Cauchy-følger i $\mathbb{Q}$. Hvis følgen $\{x_n - y_n\}_{n=1}^{\infty}$ har grænseværdien 0 for $n \to \infty$, så siges $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ og $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ at være ækvivalente, og vi skriver $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \equiv \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Proposition 3.19. *Relationen $\equiv$ er en ækvivalensrelation.*

Bevis. Refleksivitet: $x_n - x_n = 0 \to 0$ for $n \to \infty$. Symmetri: Hvis $x_n - y_n \to 0$ for $n \to \infty$, så ses det ud fra definitionen, at $y_n - x_n \to -0 = 0$ for $n \to \infty$. Transitivitet: Antag, at $x_n - y_n \to 0$ for $n \to \infty$ og $y_n - z_n \to 0$ for $n \to \infty$. Så ses det let, at $x_n - z_n = (x_n - y_n) + (y_n - z_n) \to 0$ for $n \to \infty$. □

Definition 3.20. Lad $C(\mathbb{Q})$ betegne mængden af Cauchy-følger i $\mathbb{Q}$ og lad $R = C(\mathbb{Q})/\equiv$ betegne mængden af ækvivalensklasser af Cauchy-følger i $\mathbb{Q}$. Lad $r, s \in R$, $r = [\{x_n\}_{n=1}^{\infty}]_{\equiv}$ og $s = [\{y_n\}_{n=1}^{\infty}]_{\equiv}$.

(i) Vi skriver $r \leqslant s$ hvis $r = s$ eller hvis der eksisterer et $N \in \mathbb{N}$ så $n \geqslant N$ medfører, at $x_n < y_n$.

(ii) Vi definerer multiplikation på R ved $r \cdot s = [\{x_n \cdot y_n\}_{n=1}^{\infty}]_{\equiv}$.

(iii) Vi definerer addtition på R ved $r + s = [\{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty}]_{\equiv}$.

For $q \in \mathbb{Q}$ lader vi $i(q) = [\{q\}_{n=1}^{\infty}]_{\equiv}$.

Bemærkning 3.21. Ovenstående definition ville ikke være meget værd, hvis den afhang af, hvilken repræsentant, vi havde valgt for r eller s. Det gør den heldigvis ikke, som nedenstående proposition siger. Vi skriver i øvrigt $r < s$ hvis $r \leqslant s$ og $r \neq s$, som vi plejer.

Proposition 3.22. *Relationen $\leqslant$ samt operationerne $\cdot$ og $+$ er veldefinerede på R.*

Lemma 3.23. *Hvis $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ og $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ er Cauchy-følger i $\mathbb{Q}$ og $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \not\equiv \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, så eksisterer et $k \in \mathbb{Q}_+$ og et $N \in \mathbb{N}$ så enten $n \geqslant N$ medfører, at $k < x_n - y_n$, eller $n \geqslant N$ medfører, at $k < y_n - x_n$.*

Bevis. At $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \not\equiv \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ betyder, at der eksisterer et $k \in \mathbb{Q}_+$ så der for alle $N \in \mathbb{N}$ eksisterer et $n \geqslant N$ så $|x_n - y_n| \geqslant 3k$. Da $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ og $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ er Cauchy-følger, findes to tal $N_x, N_y \in \mathbb{N}$ så $m, n \geqslant N_x$ medfører, at $|x_n - x_m| < k$ og $m, n \geqslant N_y$ medfører, at $|y_n - y_m| < k$. Find nu et $n_0 \geqslant \max\{N_x, N_y\}$ så $|x_{n_0} - y_{n_0}| \geqslant 3k$. Så er enten $x_{n_0} - y_{n_0} \geqslant 3k$ eller $y_{n_0} - x_{n_0} \geqslant 3k$. Antag uden tab af generalitet, at $x_{n_0} - y_{n_0} \geqslant 3k$. Så medfører $n \geqslant N$ at $x_n - y_n = x_n - x_{n_0} + x_{n_0} - y_{n_0} + y_{n_0} - y_n > -k + 3k - k = k$ for $N = \max\{N_x, N_y\}$. □

Lemma 3.24. *En Cauchy-følge i $\mathbb{Q}$ er begrænset.*

Bevis. Lad $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ være en Cauchy-følge i $\mathbb{Q}$ og vælg $N \in \mathbb{N}$ så $|z_n - z_m| < 1$ for $m, n \geqslant N$. Så er specielt $|x_n - x_N| < 1$ og dermed er $|x_n| < |x_N| + 1$ for alle $n \geqslant N$. Dermed er $|x_n| \leqslant M_x$ for alle $n \in \mathbb{N}$, hvor $M_x = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N-1}|, |x_N| + 1\}$. □

Bevis for Proposition 3.22. Vi viser først, at $\leqslant$ er veldefineret. Da vi allerede ved, at $\equiv$ er en ækvivalensrelation fra Proposition 3.19, er det nok at vise, at $<$ er veldefineret. Lad $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \equiv \{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$ og $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \equiv \{y'_n\}_{n=1}^{\infty}$ men $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \not\equiv \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ og antag uden tab af generalitet, at der eksisterer et $N \in \mathbb{N}$ så $n \geqslant N$ medfører, at $x_n < y_n$. Men så eksisterer jf. Lemma 3.23 et $k \in \mathbb{Q}_+$ og et $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ så $n \geqslant \tilde{N}$ medfører, at $k < y_n - x_n$. Vælg $N_x, N_y \in \mathbb{N}$ så $n \geqslant N_x$ medfører, at $|x_n - x'_n| < \frac{k}{3}$ og $n \geqslant N_y$ medfører, at $|y_n - y'_n| < \frac{k}{3}$. Sæt nu $M = \max\{\tilde{N}, N_x, N_y\}$. Så fås for $n \geqslant M$:

$$y'_n - x'_n = (y'_n - y_n) + (y_n - x_n) + (x_n - x'_n) > -\frac{k}{3} + k - \frac{k}{3} > 0$$

og vi har altså, at hvis der eksisterer et $N \in \mathbb{N}$, så $n \geqslant N$ medfører, at $x_n < y_n$, så eksisterer også et $M \in \mathbb{N}$, så $n \geqslant M$ medfører, at $x'_n < y'_n$, og $<$ er således veldefineret på R.

Næste problem er, om $\cdot$ og $+$ er veldefinerede på R. Lad $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \equiv \{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$ og $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \equiv \{y'_n\}_{n=1}^{\infty}$. Hvis $\{x_n \cdot y_n\}_{n=1}^{\infty} \equiv \{x'_n \cdot y'_n\}_{n=1}^{\infty}$ og $\{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty} \equiv \{x'_n + y'_n\}_{n=1}^{\infty}$, så er vi færdige. Men det er let at se at $x_n + y_n - (x'_n + y'_n) = (x_n - x'_n) + (y_n - y'_n) \to 0$ for $n \to \infty$, så $+$ er veldefineret på R. Da Cauchy-følger er begrænsede, se Lemma 3.24, kan vi lave følgende vurdering

$$|x_n y_n - x'_n y'_n| = |x_n(y_n - y'_n) + (x_n - x'_n)y'_n| \leqslant M_x|y_n - y'_n| + |x_n - x'_n|M_y,$$

hvoraf det let følger, at $x_n y_n - x'_n y'_n \to 0$ for $n \to \infty$, så $\cdot$ er veldefineret på R. □

Proposition 3.25. $(R, <)$ *er en ordnet mængde.*

Bevis. Lad $r, s \in R$. Det kan vises, evt. ved brug af Lemma 3.23, at hvis $r \leqslant s$ og $s \leqslant r$, så er $r = s$. Dermed kan højst ét af følgende udsagn være sandt: $r < s$, $r = s$ eller $r > s$. At netop ét af udsagnene gælder, kan vises vha. Lemma 3.23.

Lad nu $r, s, t \in R$. Vi skal vise, at hvis $r < s$ og $s < t$, så er $r < t$. Vælg Cauchy-følger i $\mathbb{Q}$ så $r = [\{x_n\}_{n=1}^{\infty}]_{\equiv}$, $s = [\{y_n\}_{n=1}^{\infty}]_{\equiv}$ og $t = [\{z_n\}_{n=1}^{\infty}]_{\equiv}$ og antag, at $r < s$ og $s < t$. Vælg nu $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, så $n \geqslant N_1$ medfører, at $x_n < y_n$ og så $n \geqslant N_2$ medfører, at $y_n < z_n$. Så er $x_n < z_n$ for $n \geqslant \max\{N_1, N_2\}$. Dermed er $r \leqslant t$. Altså mangler vi blot at vise, at $r \neq t$, men dette kan vises, f.eks. vha. Lemma 3.23. Se Opgave 3.2. □

Proposition 3.26. $(R, +, \cdot, <)$ *er et ordnet legeme.*

Bevis. Det er nemt at vise, at $(R, +, \cdot)$ er et legeme. Se Opgave 3.3. Det er lidt sværere at vise, at $(R, +, \cdot, <)$ er et ordnet legeme, se Opgave 3.4. □

Proposition 3.27 (Arkimedes' princip)**.** *For ethvert* $r \in R$ *eksisterer et* $k \in \mathbb{N}$*, således at* $r < i(k)$.

Bevis. Lad $r = [\{x_n\}_{n=1}^{\infty}]_{\equiv} \in R$. Så er $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en Cauchy-følge i $\mathbb{Q}$ og dermed begrænset af et $M_x \in \mathbb{Q}_+$. Da $M_x = \frac{p}{q}$ for $p, q \in \mathbb{N}$, så er $M_x \leqslant p$ og dermed er $x_n < p + 1 = k$ for alle $n \in \mathbb{N}$, hvormed $r \leqslant i(k)$, men det er klart, at $r \neq i(k)$, så $r < i(k)$. □

Definition 3.28 (Numerisk værdi på R)**.** Lad $r \in R$. Hvis $r \geqslant 0$, så skriver vi $|r| = r$. Hvis $r < 0$, så skriver vi $|r| = -r$.

Bemærk, at $i(|q|) = |i(q)|$ for $q \in \mathbb{Q}$.

Definition 3.29 (Grænseværdi i R)**.** Lad $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, $r_n \in R$ for alle $n \in \mathbb{N}$, være en følge i R. Hvis der eksisterer et $r_\infty \in R$ så der for alle $\varepsilon > 0$ findes et $N \in \mathbb{N}$ så $|r_n - r_\infty| < \varepsilon$, så siges følgen $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ at konvergere mod r_∞ i R.

Definition 3.30 (Cauchy-følge i R)**.** Lad $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, $r_n \in R$ for alle $n \in \mathbb{N}$, være en følge i R. Hvis der for alle $\varepsilon > 0$ findes et $N \in \mathbb{N}$ så $m, n \geqslant N$ medfører, at $|r_n - r_m| < \varepsilon$, så kaldes $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ for en Cauchy-følge i R.

Bemærkning 3.31. Bemærk, at det er ligegyldigt, at vi har $\varepsilon \in R$ og ikke $i(\varepsilon)$ for et $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$; vha. Arkimedes' princip kan det let ses, at disse to formuleringer er ækvivalente.

Proposition 3.32 (Trekantsuligheden)**.** *For $r, s \in R$ gælder ulighederne $|r+s| \leqslant |r| + |s|$ og $\big||r| - |s|\big| \leqslant |r - s|$.*

Bevis. Se Opgave 3.5. □

Proposition 3.33 ($\mathbb{Q}$ er tæt i R)**.** *For alle $r \in R$ og alle $\varepsilon > 0$ eksisterer et $q \in \mathbb{Q}$ så $|r - i(q)| \leqslant \varepsilon$.*

Bevis. Takket være Arkimedes' princip er det nok at betragte $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$. Da $r = [\{x_n\}_{n=1}^{\infty}]_{\equiv}$, hvor $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ er en Cauchy-følge i $\mathbb{Q}$, så findes et $N \in \mathbb{N}$ så $m, n \geqslant M$ medfører, at $|x_n - x_m| < \varepsilon$. Specielt er $|x_n - x_N| < \varepsilon$ for alle $n \geqslant N$. Men dette betyder jo netop, at $|r - i(x_N)| \leqslant i(\varepsilon)$. □

Sætning 3.34. *De reelle tal eksisterer.*

Bevis. I lyset af Sætning 3.4, Proposition 3.26 og Proposition 3.27 er det nok at vise, at R er fuldstændigt, idet vi så har at $R = \mathbb{R}$.

Lad $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ være en Cauchy-følge i R. Jf. Proposition 3.33 kan vi for ethvert $r_n \in R$ finde et $q_n \in \mathbb{Q}$ så $|r_n - i(q_n)| < i(\frac{1}{3n})$. Lad $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$ være givet og lad $N \in \mathbb{N}$ opfylde, at $m, n \geqslant N$ medfører, at $|r_n - r_m| < i(\frac{\varepsilon}{3})$ og $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Så er også

$$\begin{aligned} i(|q_n - q_m|) &= |i(q_n) - i(q_m)| \\ &\leqslant |i(q_n) - r_n| + |r_n - r_m| + |r_m - i(q_m)| < i(\varepsilon), \end{aligned}$$

hvoraf det følger, at $|q_n - q_m| < \varepsilon$. Dermed er $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ en Cauchy-følge i $\mathbb{Q}$, og vi har $r_\infty := [\{q_n\}_{n=1}^{\infty}]_{\equiv} \in R$, så hvis vi kan vise, at $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerer mod r_∞, er vi færdige. Betragt derfor

$$|r_n - r_\infty| \leqslant |r_n - i(q_n)| + |i(q_n) - r_\infty| < i(\tfrac{1}{3n}) + |i(q_n) - r_\infty|,$$

som oplagt går mod 0 for $n \to \infty$, da $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ er en Cauchy-følge i $\mathbb{Q}$. □

Bemærkning 3.35. Man kan definere $\mathbb{Z}$ som mængden af ækvivalensklasser $[(m,n)]_{\overset{\mathbb{Z}}{\sim}}$ af par af naturlige tal (m,n), hvor $(m,n) \overset{\mathbb{Z}}{\sim} (m', n')$ hvis $m + n' = m' + n$ (tænk på (m,n) som $m - n$), og definere $\mathbb{Q}$ som mængden af ækvivalensklasser $[(p,q)]_{\overset{\mathbb{Q}}{\sim}}$ af par (p,q), $p \in \mathbb{Z}$ og $q \in \mathbb{N}$, hvor $(p,q) \overset{\mathbb{Q}}{\sim} (p', q')$ hvis $pq' = p'q$ (tænk på (p,q) som $\frac{p}{q}$). Når vi således siger, at $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, kan man sige, at det er fordi $(1,3)$ og $(3,9)$ tilhører samme ækvivalensklasse. Når vi normalt betragter $\mathbb{N}$ som en delmængde af $\mathbb{Z}$, og $\mathbb{Z}$ som delmængde en af $\mathbb{Q}$, så kan man sige, at det sker gennem identifikationerne $\mathbb{N} \ni n \mapsto [(n+1, 1)]_{\overset{\mathbb{Z}}{\sim}} \in \mathbb{Z}$ og

$\mathbb{Z} \ni z \mapsto [(z,1)]_{\underset{\sim}{\mathbb{Q}}} \in \mathbb{Q}$. På præcis samme måde forholder det sig med $\mathbb{R}$ og identifikationen $i\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$: $\mathbb{Q}$ opfattes som en delmængde af $\mathbb{R}$ idet vi opfatter $q \in \mathbb{Q}$ som et element i $\mathbb{R}$ via $q \mapsto i(q)$. Og beskrivelsen af $\mathbb{R}$ som ækvivalensklasser af Cauchy-følger er faktisk ikke så fjern fra den gængse forståelse, som man måske først tror; når vi således tænker på et reelt tal som en "uendelig decimalbrøk," har vi jo faktisk en Cauchy-følge i $\mathbb{Q}$: $3 = \frac{3}{1}$, $3{,}1 = \frac{31}{10}$, $3{,}14 = \frac{314}{100}$ osv., og når vi siger, at $0{,}9999\ldots = 1{,}0000\ldots$ er det netop, fordi vi har to (forskellige) Cauchy-følger i $\mathbb{Q}$, som er ækvivalente; deres differens går mod 0.

4 Opgaver

4.1 Punktmængdetopologi

Opgave 1.1. Vis, at $\mathcal{A} = \{\bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i] \mid n \in \mathbb{N}, a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i < b_i\} \cup \mathbb{R} \cup \varnothing$, altså mængden bestående af alle endelige foreninger af begrænsede intervaller, som er åbne i venstre endepunkt og lukkede i højre, samt $\mathbb{R}$ og $\varnothing$, opfylder følgende tre krav:

(i) Hvis I er en endelig indeksmængde og $U_i \in \mathcal{A}$ for alle $i \in I$, så er også $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{A}$.

(ii) Hvis $U, V \in \mathcal{A}$, så er $U \cap V \in \mathcal{A}$.

(iii) Vi har både $X \in \mathcal{A}$ og $\varnothing \in \mathcal{A}$.

Vis, at $\mathcal{A}$ ikke er en topologi på $\mathbb{R}$ ved at finde en mængde $J \notin \mathcal{A}$, som kan skrives som en (uendelig) forening $J = \bigcup_{i\in I} J_i$ af mængder $J_i \in \mathcal{A}$.

Opgave 1.2. Vis ved induktion, at hvis $\mathcal{T}$ er en topologi og $U_i \in \mathcal{T}$ for alle $i = 1, \ldots, n$, så er $\bigcup_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$.

Opgave 1.3. Lad $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ være den sædvanlige topologi på $\mathbb{R}$. Vis ved eksempel, at der findes $U_i \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$, $i \in \mathbb{N}$, så $\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i \notin \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$. Med andre ord skal du finde åbne mængder $U_i \subset \mathbb{R}$, så $\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$ ikke er åben.

Opgave 1.4. Vis, at hvis $\mathcal{T}_X = \mathcal{T}_D = \mathcal{P}(X)$ eller hvis $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_T = \{\varnothing, Y\}$, så er $f\colon X \to Y$ kontinuert (uanset hvordan f ellers er defineret).

Opgave 1.5. Lad $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Vis, at f er kontinuert i "ε–δ-forstand" hvis og kun hvis f er kontinuert ifølge Definition 1.3.

Opgave 1.6. Lad $(X, \mathcal{T})$ være et topologisk rum, og lad $A \subset X$. Vis, at $(A, \mathcal{T}_A)$ er et topologisk rum, hvor $\mathcal{T}_A$ betegner sportopologien (se Definition 1.4).

Opgave 1.7. Lad $A \subset \mathbb{R}^n$ og lad $f\colon A \to \mathbb{R}^m$. Vis, at f er kontinuert i "ε–δ-forstand" hvis og kun hvis f er kontinuert mellem de topologiske rum $(A, \mathcal{T}_A)$ og $(\mathbb{R}^m, \mathcal{T}_{\mathbb{R}^m})$ ifølge Definition 1.3, hvor $\mathcal{T}_A$ er sportopologien (se Definition 1.4).

Opgave 1.8. Vis, at hvis $(X, \mathcal{T}_X)$ og $(Y, \mathcal{T}_Y)$ er topologiske rum, så er $f\colon X \to Y$ kontinuert hvis og kun hvis den er kontinuert i alle punkter i X.

Opgave 1.9. Lad $(X, \mathcal{T})$ være det topologiske rum givet ved $X = \{a, b\}$ hvor $a \neq b$, og $\mathcal{T} = \mathcal{T}_T = \{\emptyset, X\}$. Vis, at enhver følge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ i X, $x_n \in X$ konvergerer mod både a og b.

Opgave 1.10. Lad $(X, \mathcal{T})$ være det topologiske rum givet ved $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$, hvor X er en vilkårlig, ikke-tom mængde. Vis, at de eneste følger, der konvergerer i X, er de følger, som er konstante fra et vist trin.

Opgave 1.11. Vis, at hvis $\{U_i\}_{i \in I}$ overdækker $f(K)$, så er $\{f^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ en overdækning af K.

Opgave 1.12. Vis, at hvis $\{f^{-1}(U_i)\}_{i \in J}$ overdækker K, så er $\{U_i\}_{i \in J}$ en overdækning af $f(K)$.

4.2 Metriske rum

Opgave 2.1. Bevis Sætning 2.4 ved at redegøre for, at kravene til en topologi er opfyldt, samt ved at benytte trekantsuligheden.

Opgave 2.2. Bevis Sætning 2.5.

Opgave 2.3. Vis, at Hvis $A \subset X$, (X, d) er et metrisk rum og $d|_A$ er metrikken d restringeret til A, så er sportopologien på A induceret af $(X, \mathcal{T}_d)$ den samme som topologien induceret af metrikken $d|_A$.

Opgave 2.4. Generalisér definitionen af følgekontinuitet til metriske rum.

Opgave 2.5. Bevis Sætning 2.6.

Opgave 2.6. Bevis Sætning 2.17.

Opgave 2.7. Lad (X, d) være et metrisk rum. Vis, at Definition 1.8 og Definition 3.2 stemmer overens.

Opgave 2.8. Bevis Sætning 3.9.

Opgave 2.9. Bevis Sætning 3.10.

4.3 Fuldstændighed

Opgave 3.1. Vis, at $\mathbb{R}$ er en fuldstændiggørelse af $\mathbb{Q}$.

Opgave 3.2. Udfyld detaljerne ("[det] kan vises" – tre steder) i beviset for Proposition 3.25.

Opgave 3.3. Bevis, at $(R, +, \cdot)$ givet i Definition 3.20 er et legeme.

Opgave 3.4. Bevis, at $(R, +, \cdot, <)$ givet i Definition 3.20 er et ordnet legeme. Det må benyttes, at $(R, <)$ er en ordnet mængde og at $(R, +, \cdot)$ er et legeme.

Opgave 3.5. Bevis Proposition 3.32. Vink: Gør som i beviset for Sætning 3.24 i bogen.