

ANALYSE 2

Forår 2016

Ugeseddel 13 – Uge 17

I sidste uge beviste vi sætningen om inverse funktioner.

Attende kursusgang: Torsdag d. 28. april kl. 12:30 til 16:15

12:30–13:50: Forelæsning i NJ14 4-117

14:00–15:00: Opgaveregning i grupperum eller foredrag med Robin Wilson

15:00–16:15: Opgaveregning i grupperum

Vi begynder forfra og gennemgår hele pensum.

Øvelser/foredrag: Robin Wilson holder foredrag med titlen “Leonhard Euler – the Mozart of Mathematics” i Kroghstræde 3, lokale 5.126. Jeg vil opfordre alle interesserede til at deltage. De tilbageblivende¹ har et udestående med de trigonometriske funktioner, som de kan få afsluttet ved at løse nedenstående opgave.

Opgave. I Opgave 2 i Horias opgavesæt om differentiaalligninger har I vist, at hvis $\|f(t, x)\| \leq C\|x\|$ for alle $t \in \mathbb{R}$ og $x \in \mathbb{R}^d$ og $f \in C^1(\mathbb{R}^{1+d})$, så findes netop én *global* løsning til begyndelsesværdiproblemet $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$, hvor $t_0 \in \mathbb{R}$ og $y_0 \in \mathbb{R}^d$ er konstanter, og *global* betyder, at løsningen y er defineret på hele \mathbb{R} .

Definér funktionen $f: \mathbb{R}^{1+2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ved $f(t, (x_1, x_2)) = (-x_2, x_1)$.

1. Vis, at $f \in C^1(\mathbb{R}^{1+2})$ og at der eksisterer en positiv konstant C , så $\|f(t, x)\| \leq C\|x\|$.
2. Vis, at hvis $\tau(t) = (c(t), s(t))$ er løsningen til $\tau'(t) = f(t, \tau(t))$ med $\tau(0) = (1, 0)$, så er $c''(t) = -s'(t) = -c(t)$, $s''(t) = c'(t) = -s(t)$ og $c^2(t) + s^2(t) = 1$ (idiotformlen) for alle $t \in \mathbb{R}$. Vink: Da $c^2(0) + s^2(0) = 1$ er det for den sidste identitet nok at vise, at $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ givet ved $g(t) = c^2(t) + s^2(t)$ er konstant.

¹Alle har et udestående med de trigonometriske funktioner – også de tilbageblivende!

3. Vis, at alle andre løsninger til $y'(t) = f(t, y(t))$ kan skrives på formen $y(t) = (ac(t) - bs(t), as(t) + bc(t))$, hvor c og s er som ovenfor og $a, b \in \mathbb{R}$ opfylder at $y(0) = (a, b)$. Vink: Brug entydighedsdelen af eksistens- og entydighedsresultatet.
4. Vis, at $\tau_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ givet ved $\tau_k(t) = \tau(t+k)$ løser differentiaalligningen $\tau_k'(t) = f(t, \tau_k(t))$ med begyndelsesbetingelsen $\tau_k(0) = (c(k), s(k))$. Konkludér vha. ovenstående delopgave, at $c(t+k) = c(k)c(t) - s(k)s(t)$ og $s(t+k) = s(k)c(t) + c(k)s(t)$. Disse formler kalder vi for additionsformlerne. Specielt gælder dobbeltvinkelformlerne $c(2t) = c^2(t) - s^2(t)$ og $s(2t) = 2s(t)c(t)$.
5. Vis, at $-1 \leq c(t), s(t) \leq 1$ for alle $t \in \mathbb{R}$.
6. Vis, at der findes $t_1 > 0$, så $c(t_1) = 0$ eller $s(t_1) = 0$. Vink: Bemærk, at hvis t er maksimum eller minimum for c , så er $s(t) = 0$ – og tilsvarende med s og c byttet rundt. Antag for modstrid, at der *ikke* findes et $t_1 > 0$, så $s(t_1) = 0$ eller $c(t_1) = 0$. Vis, at så er c og s begge monotone (og begrænsede jf. ovenstående delopgave), og må derfor konvergere asymptotisk mod hver sin grænse for $t \rightarrow \infty$. Udnyt dette til at opnå en modstrid med at $c^2(t) + s^2(t) = 1$ for alle $t \in \mathbb{R}$.
7. Lad $t_1 > 0$ opfylde, at $c(t_1) = 0$ eller $s(t_1) = 0$. Sæt $t_2 = 2t_1$, hvis $c(t_1) = 0$ og $t_2 = t_1$, hvis $s(t_1) = 0$. Definér funktionen $\tau_{2t_2}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ved $\tau_{2t_2}(t) = (c(t+2t_2), s(t+2t_2))$. Brug dobbeltvinkelformlerne (med $t = 0$), idiotformlen og entydighed til at vise, at $\tau = \tau_{2t_2}$. Hermed er det vist, at τ – og dermed c og s – er periodiske med periode $2t_2$.
8. Lad p betegne fundamentalperioden (den mindste, positive periode) for τ og definér $\pi = \frac{p}{2}$. Brug dobbeltvinkelformlerne, idiotformlen og entydighed til at vise at $c(\pi) = -1$, $s(\pi) = 0$, $c(\frac{\pi}{2}) = 0$ og $s(\frac{\pi}{2}) = 1$. Konkludér, at s er positiv på $(0, \pi)$. Vink: I skal selvfølgelig udnytte, at p er den *mindste*, positive periode for τ – disse identiteter gælder jo eksempelvis ikke med π erstattet af 2π ! Begynd med at vise, at $c(\pi) = \pm 1$ og $s(\pi) = 0$, og vis derefter, at $c(\pi) \neq 1$ (pga. entydighed).
9. Brug additionsformlerne til at vise identiteterne $s(t + \pi) = -s(t)$, $c(t + \pi) = -c(t)$, $c(t) = s(t + \frac{\pi}{2})$ og $c^2(t) = \frac{1}{2}(1 + c(2t))$.
10. Bemærk, at arealet A af enhedscirklen kan udtrykkes som integralet $4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$. Brug dette og substitutionen $x = s(t)$ til at udregne $A = \pi$. Vink: Det er ikke helt åbenlyst – klø på! Du er nået hertil. . .

Næste uge – uge 18 – går vi så småt i træningslejr til eksamen.

Med venlig hilsen
Morten Grud Rasmussen