11. kursusgang: Determinantens egenskaber

Sætning 1: Lad A være en $n \times n$-matrix.

(1) Hvis $A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B$; $i \neq j$ så er $\det(B) = -\det(A)$.

(2) Hvis $A \xrightarrow{k r_j \to r_j} B$; $k \neq 0$ så er $\det(B) = k \cdot \det(A)$.

(3) Hvis $A \xrightarrow{c r_i + r_j \to r_j} B$; $i \neq j$ så er $\det(B) = \det(A)$.

(Bevis udeladt)

Bemærk: Hvis en $n \times n$-matrix A er rækkereduceret til en øvre triangulær matrix U uden brug af skalerings-operationen (dette er altid muligt), så er

$$\det(A) = (-1)^r u_{11} u_{22} \cdots u_{nn}$$

hvor r er antal rækkeombytninger.

Lemma: Lad E være en elementær $n \times n$-matrix og lad A være en $n \times n$-matrix. Da gælder

(L1) $\qquad \det(E) \neq 0$

(L2) $\qquad \det(EA) = \det(E)\det(A)$

Bevis: Sæt $A = I_n$ i sætning 1.

$I_n \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} E_1$; $i \neq j$ så er $\det(E_1) = -\det(I_n) = -1$.

$I_n \xrightarrow{k r_j \to r_j} E_2$; $k \neq 0$ så er $\det(E_2) = k \det(I_n) = k$.

$I_n \xrightarrow{c r_i + r_j \to r_j} E_3$; $i \neq j$ så er $\det(E_3) = \det(I_n) = 1$.

Heraf følger (L1) og (L2) q.e.d.

Sætning 2: Lad A og B være $n \times n$-matricer. Da gælder

(1) A er inverterbar hvis og kun hvis $\det(A) \neq 0$

(2) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

(3) Hvis A er inverterbar, så er $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

Bevis:

Vi viser først (1) og (2) for inverterbare matricer A.

I dette tilfælde findes elementærmatricer $E_1, E_2, \dots, E_k$
så $A = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1$.

(1) $\det(A) = \det(E_k E_{k-1} \cdots E_1) \overset{(L2)}{=} \det(E_k)\det(E_{k-1}) \cdots \det(E_1) \neq 0$ (L1) OK

(2) $\det(A)\det(B) = \det(E_k)\det(E_{k-1}) \cdots \det(E_1)\det(B)$

$$\overset{(L2)}{=} \det(E_k E_{k-1} \cdots E_1 B) = \det(AB) \qquad \text{OK}$$

Antag i stedet at A ikke er inverterbar. Lad R være A's RREF. Da A ikke er inverterbar indeholder R en nul-række, og ved udvikling efter denne fås $\det(R) = 0$.

(1) Vi har tidligere vist at der findes en inverterbar matrix P så $PA = R$. Dermed er $A = P^{-1}R$, hvor P^{-1} er inverterbar, så

$$\det(A) = \det(P^{-1}R) = \det(P^{-1})\det(R) = \det(P^{-1}) \cdot 0 = 0 \qquad \text{OK}$$

(2) Hvis AB er inverterbar er A også inverterbar idet

$$A\,(B(AB)^{-1}) = AB(AB)^{-1} = I_n.$$

Altså er AB ikke inverterbar så $\det(AB) \overset{(1)}{=} 0$. Vi har

$$\det(AB) = 0 = 0 \cdot \det(B) = \det(A) \cdot \det(B) \qquad \text{OK.}$$

(3) Følger af (2) og $\det(I_n) = 1$ (opgave) q.e.d.

! Sætning 3: Lad A være en $n \times n$-matrix. Så er

$$\det(A^T) = \det(A).$$

"Bevis": Transponering ombytter rækker og søjler. Beregn $\det(A)$ ved udvikling efter rækker og $\det(A^T)$ ved udvikling efter søjler.

q.e.d.

Bemærk: I almindelighed er

$$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B).$$

Eks: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ så $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Her er $\det(A+B) = 1$ og $\det(A) + \det(B) = 0$.

Bemærk:

For en matrix på formen $\begin{array}{c|cc} & m & n \\ \hline m & A & B \\ n & O & C \end{array}$ er

②

$$\det\left(\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right]\right) = \det(A)\det(C).$$

Bevis:

$$\left[\begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right] \quad \text{så}$$

$$\underbrace{\det\left(\left[\begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right]\right)}_{\substack{\det(C) \\ \text{ved udvikling efter} \\ \text{rækker fra oven}}} \cdot \underbrace{\det\left(\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right]\right)}_{\substack{\det(A) \\ \text{ved udvikling efter} \\ \text{rækker fra neden}}} = \det\left(\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right]\right)$$

q.e.d.

Eks.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 & 12 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 10 & 3 \end{vmatrix} = (1\cdot 3 - (-1)\cdot 2)\cdot(5\cdot 3 - 1\cdot 10) = 25$$

Sætning (Cramers regel)

Betragt ligningssystemet $A\vec{x} = \vec{b}$, hvor

$A = [\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \dots\ \vec{a}_n]$ er en inverterbar $n\times n$-matrix og $\vec{b}\in\mathbb{R}^n$.

Sæt $B_j = [\vec{a}_1\ \dots\ \vec{a}_{j-1}\ \vec{b}\ \vec{a}_{j+1}\ \dots\ \vec{a}_n]$ for $j = 1, 2, \dots, n$.

Den entydige løsning $\vec{x}$ til systemet er givet ved

$$x_j = \frac{\det(B_j)}{\det(A)}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Eks.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 8 \\ 6x_1 - 5x_2 = 32 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 32 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \quad \text{inverterbar OK}$$

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{\begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 32 & -5 \end{vmatrix}}{-4}, \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 32 \end{vmatrix}}{-4} \right) = \left(\frac{-8}{-4}, \frac{16}{-4}\right) = \underline{\underline{(2, -4)}}$$

Bevis for Cramers regel: Da A er inverterbar har $A\vec{x} = \vec{b}$ den entydige løsning $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

Sæt $U_j = [\vec{e}_1 \; \dots \; \vec{e}_{j-1} \;\; \vec{x} \;\; \vec{e}_{j+1} \; \dots \; \vec{e}_n]$, hvor $[\vec{e}_1 \; \vec{e}_2 \dots \vec{e}_n] = I_n$

Ved udvikling efter række j fås

$$\det(U_j) = x_j \det(I_{n-1}) = x_j .$$

Vi har

$$\begin{aligned} AU_j &= [A\vec{e}_1 \; \dots \; A\vec{e}_{j-1} \;\; A\vec{x} \;\; A\vec{e}_{j+1} \; \dots \; A\vec{e}_n] \\ &= [\vec{a}_1 \; \dots \; \vec{a}_{j-1} \;\; \vec{b} \;\; \vec{a}_{j+1} \; \dots \; \vec{a}_n] = B_j \end{aligned}$$

Heraf fås

$$\det(AU_j) = \det(A)\det(U_j) = \det(A)x_j = \det(B_j)$$

så

$$x_j = \frac{\det(B_j)}{\det(A)} .$$

q.e.d.