11. kursusgang: Repetition

Def. Determinanten af en 2×2-matrix

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d\end{vmatrix} = ad - bc$$

Sætning: Matricen $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}$ er inverterbar hvis og kun hvis $\det(A) \neq 0$ og

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a\end{bmatrix}.$$

Def. Determinanten af en 1×1-matrix: $\det([a]) = a$

Lad $A = [a_{ij}]$ være en $n\times n$-matrix.
A_{ij} er $(n-1)\times(n-1)$-matricen der fremkommer ved at slette i'te række og j'te søjle i A.
Den (i,j)'te kofaktor af A er

$$c_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$$

Def. $\det(A) = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + \dots + a_{1n}c_{1n}$.

Bemærk:
$(-1)^{i+j}$ er bestemt ved $\begin{bmatrix} + & - & + & - & \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \\ - & + & - & + & \\ & \dots & & & \end{bmatrix}$.

Eks.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d\end{vmatrix} = ad - bc,$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i\end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i\end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i\end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h\end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & p & q\end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & p & q\end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & p & q\end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & q\end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & p\end{vmatrix},$$

...

Sætning: Determinanten af A kan beregnes ved udvikling efter i'te række

$$\det(A) = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \dots + a_{in}c_{in}$$

og ved udvikling efter j'te søjle

$$\det(A) = a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \dots + a_{nj}c_{nj}$$

for $i = 1, 2, \dots, n$ og $j = 1, 2, \dots, n$.

Eks. $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 0 + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 21 = -22$

Bemærk: Determinanten af en øvre eller nedre triangulær matrix er lig produktet af diagonal indgangene

Eks. $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-1) \cdot 5 = -35$

Sætning: Lad A være en $n \times n$-matrix

(1) Hvis $A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B$; $i \neq j$ så er $\det(B) = -\det(A)$.

(2) Hvis $A \xrightarrow{k r_i \to r_i} B$; $k \neq 0$ så er $\det(B) = k \cdot \det(A)$.

(3) Hvis $A \xrightarrow{c r_i + r_j \to r_j} B$; $i \neq j$ så er $\det(B) = \det(A)$.

Eks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[-7r_1 + r_3 \to r_3]{-4r_1 + r_2 \to r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -5 & -13 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{5}{3}r_2 + r_3 \to r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \cdot (-3) \cdot (-3) = 9$$