Regneregler for brøker og potenser

Robert Jacobsen

18. juni 2012

Indhold

I de to afsnit præsenteres regnereglerne først generelt, som man finder dem i et kompendium. Herefter vil der være eksempler, der belyser, hvorledes regnereglerne anvendes. Der er både taleksempler og eksempler, der involverer mere generelle udtryk. Tegnet ✓ bruges til at afslutte eksempler.

Tanken er, at man kan læse eksemplerne samtidig med de generelle formler. For at der ikke skal herske tvivl om, hvilke regler, der benyttes i eksemplerne, benytter jeg en speciel notation: De formler, der opskrives, har et nummer i højre side. Når en formel anvendes i en udregning, står formelnummeret over lighedstegnet – som for eksempel $\overset{(1.3)}{=}$, når der henvises til formel (1.3). På side 2 indføres brøkregneregler, der benævnes br 1 til br 5. Når disse regler anvendes i en udregning, skrives det som $\overset{\text{br 3}}{=}$. I eksempel 1.1 forklares notationen i forbindelse med eksemplet.

1 Brøker

Brøker er størrelser, vi kan skrive som

$$\text{brøk} = \frac{\text{tæller}}{\text{nævner}}.$$

En huskeregel til, hvad der hører til hvor, er, at **t**ælleren er i **t**oppen og **n**ævneren er for **n**eden. Når vi regner med brøker er det vigtigt at huske, at det *stregt forbudt* at dividere med 0. I det følgende er a, b, c og d blot vilkårlige tal. De generelle regneregler skrives her op med bogstaver, men bagefter vil der være eksempler med tal.

En nyttig egenskab ved brøker er, at vi kan forkorte/forlænge dem uden at ændre brøkens værdi. Det betyder, at vi kan gange/dividere med samme det samme tal c i tæller og nævner:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}. \tag{1.1}$$

Hvis a og b ikke har nogen fælles faktorer, siges brøken a/b at være *uforkortelig*. Det er altid ønskværdigt at præsentere facit som en uforkortelig brøk.

Når vi skal lægge brøker sammen, skal vi først sikre os, at de har samme nævner. I så tilfælde gælder der, at

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}. \tag{1.2}$$

Skal vi addere to brøker, der ikke har samme nævner, skal vi først forlænge brøkerne, så de får sammen nævner. Vi kan *altid* gøre som følger:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \overset{(1.1)}{=} \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{b \cdot d} \overset{(1.2)}{=} \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}. \tag{1.3}$$

Hvis den ene nævner er en faktor i den anden nævner (det vil sige, hvis vi for eksempel kan skrive $b = d \cdot e$), kan vi reducere antallet af udregninger i (1.3):

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \overset{(1.1)}{=} \frac{a}{b} + \frac{c \cdot e}{d \cdot e} = \frac{a}{b} + \frac{c \cdot e}{b} = \frac{a + c \cdot e}{b}. \tag{1.4}$$

Det væsentlige er her, at vi kun forlænger den første brøk, da det sikrer, at de to brøker så får samme nævner. Jeg vil dog gerne understrege, at (1.3) altid kan bruges, selvom (1.4) kan reducere antallet af udregninger.

Bemærk, at ethvert tal kan skrives som en brøk, nemlig

$$a = \frac{a}{1}. \tag{1.5}$$

Der gælder følgende regneregler når vi foretager multiplikation og division, der involverer brøker.

BR 1 "*Vi ganger en brøk med et tal, ved at gange med tallet i tælleren*":

$$c \cdot \frac{a}{b} = \frac{c \cdot a}{b}.$$

BR 2 "*Vi deler en brøk med et tal ved at gange med tallet i nævneren*":

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b \cdot c}.$$

BR 3 "*Vi ganger to brøker ved at gange tæller med tæller og nævner med nævner*":

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

BR 4 "*Vi deler et tal med en brøk ved at gange med den omvendte brøk*":

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = a \cdot \frac{c}{b} \overset{\text{br 1}}{=} \frac{a \cdot c}{b}.$$

BR 5 "*Vi deler en brøk med en brøk ved at gange med den omvendte brøk*":

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \overset{\text{br 3}}{=} \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Vi kan slå br 4 og br 5 sammen til, at "*vi deler med en brøk ved at gange med den omvendte*" – sålænge vi husker at foretage den efterfølgende multiplikation korrekt.

1.1 Eksempler

I eksempel 1.1 forklares den notation, der bliver benyttet i eksemplerne.

Eksempel 1.1 (Forlæng/forkort)
Først et eksempel på, at heltalsdivision (der går op) bare er forkortning af brøker.

$$\frac{6}{2} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} \overset{(1.1)}{=} \frac{3}{1} \overset{(1.5)}{=} 3$$

I det første lighedstegn er der ingen formelhenvisning, da vi blot laver to multiplikationer – nemlig $6 = 3 \cdot 2$ og $2 = 2 \cdot 1$. I det andet lighedstegn bruger vi formel (1.1) med $a = 3$, $b = 1$ og $c = 2$. Til sidst bruger vi formel (1.5) med $a = 3$.

Reduktion til en uforkortelig brøk, der ikke er et heltal, foregår på samme måde – identificer fælles faktorer i tæller og nævner og forkort brøken:

$$\frac{6}{15} = \frac{3 \cdot 2}{3 \cdot 5} \overset{(1.1)}{=} \frac{2}{5},$$
$$\frac{2}{6} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} \overset{(1.1)}{=} \frac{1}{3}.$$

✓

Eksempel 1.2 (Addition af brøker)
Først et eksempel, hvor vi har fælles nævner fra starten og et eksempel, hvor vi efterfølgende kan forkorte brøken

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{5} \overset{(1.2)}{=} \frac{1+2}{5} = \frac{3}{5}$$
$$\frac{2}{3} + \frac{4}{3} \overset{(1.2)}{=} \frac{2+4}{3} = \frac{6}{3} = \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 3} \overset{(1.1)}{=} \frac{2}{1} \overset{(1.5)}{=} 2.$$

To eksempler på addition af brøker med forskellig nævner, hvor vi benytter fremgangsmåden i (1.3):

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{3} \overset{(1.3)}{=} \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{9}{15} + \frac{10}{15} \overset{(1.2)}{=} \frac{9+10}{15} = \frac{19}{15}.$$

$$\frac{1}{3}+\frac{4}{9} \overset{(1.3)}{=} \frac{1\cdot 9}{3\cdot 9}+\frac{4\cdot 3}{3\cdot 9}=\frac{9}{27}+\frac{12}{27} \overset{(1.2)}{=} \frac{9+12}{27}=\frac{21}{27}=\frac{3\cdot 7}{3\cdot 9} \overset{(1.1)}{=} \frac{7}{9}.$$

Som et eksempel på, at (1.4) kan spare os for nogle udregninger i forhold til (1.3), kan vi foretage den sidste udregning igen:

$$\frac{1}{3}+\frac{4}{9} \overset{(1.4)}{=} \frac{1\cdot 3}{3\cdot 3}+\frac{4}{9}=\frac{3}{9}+\frac{4}{9} \overset{(1.2)}{=} \frac{3+4}{9}=\frac{7}{9}.$$

Vi kan naturligvis også benytte regnereglerne til at addere mere end to brøker. Jo flere brøker, vi skal lægge sammen, jo bedre er det at forsøge at benytte (1.4), da vi ellers får nævnere med mange faktorer. Betragt for eksempel

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} \overset{(1.4)}{=} \frac{1\cdot 4}{2\cdot 4}+\frac{1\cdot 2}{4\cdot 2}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8} \overset{(1.2)}{=} \frac{4+2+1}{8}=\frac{7}{8}.$$

Til sidst et eksempel på, hvordan vi lægger hele tal og brøker sammen:

$$2+\frac{3}{5} \overset{(1.5)}{=} \frac{2}{1}+\frac{3}{5} \overset{(1.4)}{=} \frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\frac{3}{5}=\frac{10}{5}+\frac{3}{5} \overset{(1.2)}{=} \frac{10+3}{5}=\frac{13}{5}.$$

En vigtig pointe i ovenstående udregninger er, at når vi lægger tal sammen med brøker, kan vi altid benytte (1.4). ✓

Eksempel 1.3 (Multiplikation med brøker)
I disse eksempler involveres også de første brøkregneregler. Først et eksempel på br 1:

$$3\cdot\frac{2}{15} \overset{\text{br 1}}{=} \frac{3\cdot 2}{15}=\frac{3\cdot 2}{3\cdot 5} \overset{(1.1)}{=} \frac{2}{5}.$$

Dernæst multiplikation af to brøker:

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} \overset{\text{br 3}}{=} \frac{3\cdot 2}{4\cdot 3}=\frac{1\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 2\cdot 3} \overset{(1.1)}{=} \frac{1}{2}.$$

Involverer en udregning både multiplikation og addition af brøker er det vigtigt at huske på regneartemes hieraki[1]:

$$\begin{aligned}\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{7}\cdot\frac{8}{3} &\overset{\text{br 3}}{=} \frac{5\cdot 3}{6\cdot 2}+\frac{1\cdot 8}{7\cdot 3}=\frac{15}{12}+\frac{8}{21}=\frac{15}{3\cdot 4}+\frac{8}{3\cdot 7}\\ &\overset{(1.1)}{=} \frac{15\cdot 7}{3\cdot 4\cdot 7}+\frac{8\cdot 4}{3\cdot 7\cdot 4}=\frac{105}{84}+\frac{32}{84} \overset{(1.2)}{=} \frac{105+32}{84}=\frac{137}{84}.\end{aligned}$$ ✓

Eksempel 1.4 (Division med brøker)
Først demonstreres br 4:

$$\frac{3}{\frac{3}{5}} \overset{\text{br 4}}{=} \frac{3\cdot 5}{3} \overset{(1.1)}{=} \frac{5}{1} \overset{(1.5)}{=} 5.$$

[1] Først udregnes rødder og potenser, dernæst multiplikation og division og til sidst addition.

Dernæst et par eksempel på br 5:

$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} \overset{\text{br 5}}{=} \frac{1\cdot 2}{1\cdot 4} = \frac{2}{4} \overset{(1.1)}{=} \frac{1}{2}.$$

$$\frac{\frac{7}{6}}{\frac{5}{3}} \overset{\text{br 5}}{=} \frac{7\cdot 3}{6\cdot 5} = \frac{7\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 5} \overset{(1.1)}{=} \frac{7}{2\cdot 5} = \frac{7}{10}. \qquad \checkmark$$

Eksempel 1.5 (Procentregning)
Procentregning er en forklædt form for regning med brøker: Procent betyder "per hundrede" (underforstået 1 per 100), og dermed har vi for eksempel, at

$$30\% = 30\cdot\frac{1}{100} \overset{\text{br 1}}{=} \frac{30}{100} = \frac{3\cdot 10}{10\cdot 10} \overset{(1.1)}{=} \frac{3}{10} = 0,3,$$
$$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1\cdot 25}{4\cdot 25} \overset{(1.1)}{=} \frac{1}{4} = 0,25. \qquad \checkmark$$

Eksempel 1.6
Et eksempel, der illustrerer, at lidt kendskab til brøker ikke er at foragte i den virkelige verden: I 1999 kom politikeren Aase D. Madsen (DF) med et udsagn i stil med, at eftersom 25 % af de mandlige vælgere og 25 % af de kvindelige vælgere aldrig benytter biblioteker, benytter 50 % af den samlede befolkningen aldrig biblioteker.[2] (Det er her antaget, at de mandlige og kvindelige vælgere hver udgør halvdelen af befolkningen) Dette regnestykke er forkert, hvilket man kan overbevise sig om ved at benytte den samme logik i tilfældet hvor det er 60 % af de mandlige vælgere og 60 % af de kvindelige vælgere, der aldrig bruger biblioteket. Det regnestykke, man her skal foretage, er som følger:

$$\begin{aligned}
&25\%\cdot\text{mandlige vælgere} + 25\%\cdot\text{kvindelige vælgere}\\
&\quad= 25\%\cdot\frac{1}{2}\text{befolkningen} + 25\%\cdot\frac{1}{2}\text{befolkningen}\\
&\quad= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\text{befolkningen} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\text{befolkningen}\\
&\quad\overset{\text{br 3}}{=} \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\text{befolkningen} + \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\text{befolkningen}\\
&\quad= \frac{1}{8}\text{befolkningen} + \frac{1}{8}\text{befolkningen} = 2\cdot\frac{1}{8}\text{befolkningen}\\
&\quad\overset{\text{br 1}}{=} \frac{2}{2\cdot 4}\text{befolkningen} \overset{(1.1)}{=} \frac{1}{4}\text{befolkningen}\\
&\quad= 25\%\ \text{befolkningen}. \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

For at give nogle sværere eksempler, vil jeg her minde om *kvadratformlerne*:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab, \tag{1.6}$$

[2] Historien kan findes på `http://webarkiv.ft.dk/?/samling/19991/salen/l78_beh1_17_7_20.htm`

$$(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab, \tag{1.7}$$
$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2. \tag{1.8}$$

Normalt sammenskriver vi (1.6) og (1.7) til $(a\pm b)^2 = a^2+b^2\pm 2ab$. Da vi læser fra venstre mod højre er der en tendens til, at folk ofte kun husker formler fra venstre mod højre. Med kvadratformlerne er det ikke videre interessant at huske formlerne i denne retning, da vi der blot kan gange parenteserne ud og få resultatet. Men det er også fra højre mod venstre, der er den interessante vej. Et par eksempler på, hvordan formlerne bruges fra højre mod venstre:

$$x^2-2x+1 = x^2-2\cdot 1\cdot x+1^2 = (x-1)^2, \tag{a=x, b=1}$$
$$99^2-1 = (99+1)\cdot(99-1) = 100\cdot 98 = 9800. \tag{a=99, b=1}$$

Eksempel 1.7 (Sværere eksempler)
Til sidst er her eksempler, hvor vi ikke udelukkende har tal, og hvor vi får brug for kvadratformlerne.

$$\begin{aligned}\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b} &\overset{(1.1)}{=} \frac{a-b}{(a+b)(a-b)}+\frac{a+b}{(a-b)(a+b)}\\ &\overset{(1.8)}{=} \frac{a-b}{a^2-b^2}+\frac{a+b}{a^2-b^2} \overset{(1.2)}{=} \frac{a-b+a+b}{a^2-b^2} = \frac{2a}{a^2-b^2}.\end{aligned}$$

Et mindre oplagt eksempel:

$$\begin{aligned}\frac{1}{y^2+4y+4}+\frac{1}{y+2} &= \frac{1}{y^2+2\cdot 2\cdot y+2^2}+\frac{1}{y+2} \overset{(1.6)}{=} \frac{1}{(y+2)^2}+\frac{1}{y+2}\\ &\overset{(1.4)}{=} \frac{1}{(y+2)^2}+\frac{y+2}{(y+2)^2} \overset{(1.2)}{=} \frac{1+y+2}{(y+2)^2} = \frac{y+3}{(y+2)^2}.\end{aligned}$$

Et eksempel, der tager en smule forskud på glæderne i næste afsnit:

$$\frac{x^2-9}{x^2+6x+9} = \frac{x^2-3^2}{x^2+2\cdot 3\cdot x+3^2} \overset{(1.6)}{=} \frac{(x+3)(x-3)}{(x+3)^2} = \frac{(x+3)(x-3)}{(x+3)(x+3)} \overset{(1.1)}{=} \frac{x-3}{x+3}.$$

Et par eksempler, der minder om, at parenteser tjener et formål, når vi subtraherer:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2+2x+1}-\frac{5-x}{x+1} &\overset{(1.6)}{=} \frac{1}{(x+1)^2}-\frac{5-x}{x+1} \overset{(1.1)}{=} \frac{1}{(x+1)^2}-\frac{(5-x)(x+1)}{(x+1)^2}\\ &= \frac{1}{(x+1)^2}-\frac{4x+5-x^2}{(x+1)^2} \overset{(1.2)}{=} \frac{1-(4x+5-x^2)}{(x+1)^2} = \frac{1-4x-5+x^2}{(x+1)^2}\\ &= \frac{x^2-4x-4}{(x+1)^2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{6x-5y}{4}-\frac{2x-3y}{3}-\frac{4y-x}{6} &\overset{(1.2)}{=} \frac{3(6x-5y)}{12}-\frac{4(2x-3y)}{12}-\frac{2(4y-x)}{12}\\ &= \frac{18x-15y}{12}-\frac{8x-12y}{12}-\frac{8y-2x}{12}\end{aligned}$$

$$\overset{(1.2)}{=} \frac{18x - 15y - (8x - 12y) - (8y - 2x)}{12}$$

$$= \frac{18x - 15y - 8x + 12y - 8y + 2x}{12}$$

$$= \frac{12x - 11y}{12} \qquad \checkmark$$

2 Potenser

I et udtryk af typen a^n kalder vi a for *grundtallet* og n for *potensen*. Grunden til at indføre rødder er, at vi ønsker at løse ligninger af typen $x^n = a$. Den fundamentale sammenhæng mellem rødder og potenser er:

$$\sqrt[n]{a} \text{ er det tal, der opfylder, at } \sqrt[n]{a}^{\,n} = a. \tag{2.1}$$

(Hvis n er et lige tal, skal vi huske, at a skal være positiv!) Det skriver vi også som:

$$b = \sqrt[n]{a} \iff b^n = a.$$

Vi har følgende regneregler for potenser:

$$a^0 = 1. \tag{2.2}$$

$$a^1 = a. \tag{2.3}$$

Saml potenserne:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}. \tag{2.4}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}. \tag{2.5}$$

Saml grundtallene:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n. \tag{2.6}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \tag{2.7}$$

Negative potenser:

$$a^{-n} = a^{0-n} \overset{(2.5)}{=} \frac{a^0}{a^n} \overset{(2.2)}{=} \frac{1}{a^n}. \tag{2.8}$$

Potens i potens:

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}. \tag{2.9}$$

Rødder som potenser:

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}. \tag{2.10}$$

$$\sqrt[n]{a}^{\,m} = a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}. \tag{2.11}$$

Bemærk:

- Vi kan se, at (2.2) skal gælde, ved at benytte (2.4) med $m = 0$.
- (2.10) er et specialtilfælde af (2.11) med $m = 1$.
- Vi kan indse (2.11) på følgende vis:

$$\sqrt[n]{a}^{\,m} \overset{(2.10)}{=} \left(a^{1/n}\right)^m \overset{(2.9)}{=} a^{\frac{1}{n} \cdot m} \overset{\text{br 1}}{=} a^{m/n} \overset{\text{br 1}}{=} a^{m \cdot \frac{1}{n}} \overset{(2.9)}{=} \left(a^m\right)^{1/n} \overset{(2.10)}{=} \sqrt[n]{a^m}.$$

Da rødder blot er specielle potenser, kan vi formulere (2.6) og (2.7) specielt for rødder:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}. \tag{2.12}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}. \tag{2.13}$$

2.1 Eksempler

Eksempel 2.1
Bemærk følgende omskrivning med kvadratrødder:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \overset{(1.1)}{=} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} \overset{(2.4)}{=} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}^2} = \frac{\sqrt{a}}{a}. \tag{2.14}$$

Hvis et resultat i Edwards & Penney er en brøk, hvor der indgår en kvadratrod i nævneren, benyttes altid omskrivningen i (2.14). For eksempel:

$$\frac{9}{\sqrt{13}} \overset{\text{br 1}}{=} 9 \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} \overset{(2.14)}{=} 9 \cdot \frac{\sqrt{13}}{13} \overset{\text{br 1}}{=} \frac{9}{13} \cdot \sqrt{13}. \qquad \checkmark$$

Eksempel 2.2
Et eksempel på hvordan (2.4), (2.6) og (2.11) anvendes

$$\begin{aligned} 2^3 \cdot 4^4 \cdot \sqrt[3]{2}^6 &= 2^3 \cdot (2^2)^4 \cdot \sqrt[3]{2}^6 \overset{(2.6)}{=} 2^3 \cdot 2^{2\cdot 4} \cdot \sqrt[3]{2}^6 \\ &= 2^3 \cdot 2^8 \cdot \sqrt[3]{2}^6 \overset{(2.11)}{=} 2^3 \cdot 2^8 \cdot 2^{6/3} = 2^3 \cdot 2^8 \cdot 2^2 \overset{(2.4)}{=} 2^{3+8+2} = 2^{13}. \end{aligned}$$

Vi kan også involvere (2.7):

$$\frac{\sqrt{27}}{\sqrt[6]{27}} \overset{(2.10)}{=} \frac{27^{1/2}}{27^{1/6}} \overset{(2.5)}{=} 27^{1/2-1/6} \overset{(1.4)}{=} 27^{1/3} \overset{(2.10)}{=} \sqrt[3]{27} = 3.$$

Undervejs brugte vi (1.4): $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} - \frac{1}{6} \overset{(1.2)}{=} \frac{2}{6} \overset{(1.1)}{=} \frac{1}{3}$.

Bemærk, at vi her *ikke* kan bruge (2.13), da vi i tælleren har kvadratroden og i nævneren den 6'te rod. ✓

Eksempel 2.3
Et mere kompliceret eksempel:

$$\frac{\sqrt[5]{x} \cdot \sqrt[3]{x}^2}{x \cdot \sqrt{x}} \overset{(2.3)}{=} \frac{\sqrt[5]{x} \cdot \sqrt[3]{x}^2}{x^1 \cdot \sqrt{x}} \overset{(2.11)}{=} \frac{x^{1/5} \cdot x^{2/3}}{x^1 \cdot x^{1/2}} \overset{(2.4)}{=} \frac{x^{1/5+2/3}}{x^{1+1/2}}$$

Her bruger vi (1.3) i begge potenser: $\frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{3}{15} + \frac{10}{15} \overset{(1.2)}{=} \frac{13}{15}$ og $1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} \overset{(1.2)}{=} \frac{3}{2}$

$$\overset{(1.3)}{=} \frac{x^{13/15}}{x^{3/2}} \overset{(2.5)}{=} x^{13/15-3/2}$$

Igen bruges (1.3): $\frac{13}{15} - \frac{3}{2} = \frac{26}{30} - \frac{45}{30} \overset{(1.2)}{=} -\frac{19}{30}$

$$= x^{-19/30} \overset{(2.8)}{=} \frac{1}{x^{19/30}} \overset{(2.11)}{=} \frac{1}{\sqrt[30]{x^{19}}}. \qquad \checkmark$$

Eksempel 2.4
Med rødder kan vi flytte faktorer udenfor rodtegnet:

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} \overset{(2.12)}{=} \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$
$$\sqrt{27} = \sqrt{3^3} \overset{(2.4)}{=} \sqrt{3^2 \cdot 3} \overset{(2.12)}{=} \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3} \overset{(2.1)}{=} 3 \cdot \sqrt{3}$$

Omvendt kan vi også samle flere rødder til ét rodtegn:

$$\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{24}}{\sqrt{3}} \overset{(2.12)}{=} \frac{\sqrt{2 \cdot 24}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} \overset{(2.13)}{=} \sqrt{\frac{48}{3}} = \sqrt{16} = 4$$

✓