

**Prøve i Matematik – Geometriske
Grundbegreber**

M-sektorens 4. semester

Tirsdag, den 04. Juni 2002, kl. 9:00 – 12:00

Alle sædvanlige hjælpemidler må medtages.

PC er ikke tilladt.

Opgave 1: (40%) Lad $a > 0$ være en konstant. En plan kurve (en logaritmisk spiral) er givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP_t} = [e^{at} \cos t, e^{at} \sin t], \quad t \in \mathbf{R}.$$

1. Beregn hastighedsvektoren $\mathbf{r}'(t)$ og gør rede for, at farten i P_t er

$$v(t) = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{a^2 + 1}e^{at}.$$

2. Beregn kurvens enhedstangentvektor $\mathbf{t}(t)$ og hovednormalvektor $\mathbf{n}(t)$ i punktet P_t .
3. Beregn længden l af kurvestykket fra P_0 til $P_{2\pi}$ og brøken $\frac{l}{d}$, hvor d betegner afstanden mellem P_0 og $P_{2\pi}$.
4. Vis, at kurvens krumningsfunktion er givet ved

$$\kappa(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}e^{at}}.$$

5. Bestem en parameterfremstilling for spiralkurvens evolutkurve, dvs., bestem for hvert $t > 0$ centret for krumningscirklen gennem P_t .

Opgave 2: (24%) De tre punkter $P_0 : [0, 0]$, $P_1 : [0, 4]$ og $P_2 : [8, 4]$ bestemmer en naturlig kubisk spline.

1. Beregn hastighedsvektoreren \mathbf{v}_1 i P_1 og gør rede for, at hastighedsvektorerne i de to andre punkter er givet ved $\mathbf{v}_0 = [-2, 5]$, hhv. $\mathbf{v}_2 = [10, -1]$.
2. Beregn parameterfremstillingen for den delkurve, der forbinder P_1 og P_2 .
3. Beregn de syv Bezierpunkter, der bestemmer den samme kurve.
4. Beregn vinklen mellem tangentvektorerne i kurvens endepunkter.

Opgave 3: (36%) En flade S er givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(u, v) = \overrightarrow{OP}_{u,v} = [u \cos v, u \sin v, v^2] \quad u > 0, \quad v > 0.$$

1. Beregn koefficienterne i fladens 1. fundamentalform.
2. Beregn koefficienterne i fladens 2. fundamentalform.
3. Beregn Gausskrumningen K og middelkrumningen H , og gør rede for at fladen er hyperbolsk krummet i alle sine punkter.
4. Beregn i punktet $P_{2,1}$ de to hovedkrumninger k_1 og k_2 .

Husk at skrive navn og gruppenummer på besvarelsene. **Og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelsene.