

# Prøve i Matematik – Geometriske Grundbegreber

## M-sektorens 4. semester

Onsdag, den 28. Maj 2003, kl. 9:00 – 12:00

Alle sædvanlige hjælpemidler må medtages.  
PC er ikke tilladt.

**Opgave 1:** (36%) En rumkurve er givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP_t} = [t, t^2, \frac{2}{3}t^3], \quad t \in \mathbf{R}.$$

1. Beregn hastighedsvektoren  $\mathbf{r}'(t)$  og vis, at farten er givet ved  $v(t) = 1 + 2t^2$ .
2. Beregn  $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)$ , og vis at  $\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\| = 2(1 + 2t^2)$ .
3. Beregn krumningsfunktionen  $\kappa(t)$  og torsionsfunktionen  $\tau(t)$  og vis, at de er ens.
4. Beregn i ethvert punkt enhedstangentvektoren  $\mathbf{t}(t)$  og vis, at den danner en vinkel på  $45^\circ$  med den konstante vektor  $\mathbf{a} = [1, 0, 1]$ .

**Opgave 2:** (28%) Givet et reelt tal  $a > 0$ . De tre punkter  $P_0 : [-1, 0]$ ,  $P_1 : [0, a]$  og  $P_2 : [1, 0]$  bestemmer en naturlig kubisk spline.

1. Beregn hastighedsvektorerne  $\mathbf{v}_0$  i  $P_0$ ,  $\mathbf{v}_1$  i  $P_1$  og  $\mathbf{v}_2$  i  $P_2$ .
2. Gør rede for at parameterfremstillingen for den delkurve, der forbinder  $P_1$  og  $P_2$  er givet ved

$$\mathbf{p}_2(t) = [t, \frac{a}{2}(t^3 - 3t^2 + 2)].$$

3. Vis at splinekurven har krumning  $\kappa = -3a$  i punktet  $P_1$ . Beregn kurvens krumningscenter i  $P_1$ . Sammenlign med krumning og krumningscenter for parabelen med parameterfremstillingen  $\mathbf{r}(t) = [t, a(1 - t^2)]$ ,  $-1 \leq t \leq 1$ , gennem  $P_0, P_1, P_2$ .

**Opgave 3:** (36%) En flade  $S$  er givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(u, v) = \overrightarrow{OP}_{u,v} = [u^2, v^2, u + v], \quad 0 < u < 2, -2 < v < 2;$$

– se den vedlagte tegning.

1. Bestem en ligning for fladens affine tangentplan i punktet  $P_{(1,1)} : (1, 1, 2)$ .
2. Bestem koefficienterne  $E, F, G$  i fladens 1. fundamentalform samt  $e, f, g$  i fladens 2. fundamentalform.
3. Gør rede for at den Gaussiske krumning  $K(u, v)$  i  $P_{(u,v)}$  er givet ved

$$K(u, v) = \frac{uv}{(4u^2v^2 + u^2 + v^2)^2}.$$

4. Hvilke punkter på fladen er elliptiske, hhv. hyperbolske? Marker områderne med elliptiske, hhv. hyperbolske punkter på vedlagte figur (afleveres).

Husk at skrive navn og gruppenummer på besvarelserne. **Og skriv antallet af afleverede ark på 1. side af besvarelserne.**

