# Prøve i Matematik – Geometriske Grundbegreber

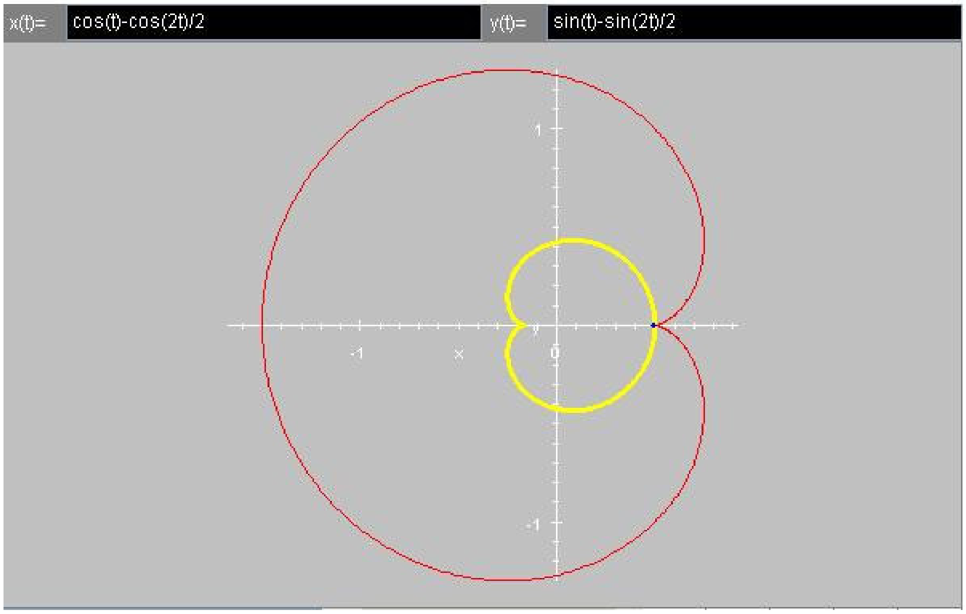
# M-sektorens 4. semester

# Tirsdag, den 30. maj 2006, kl. 9:00 – 12:00

# Alle sædvanlige hjælpemidler må medtages.
# PC er ikke tilladt.

**Opgave 1:** (40%)
En lukket plan kurve $C$ er givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP}_t = [\cos(t) - \frac{\cos(2t)}{2}, \sin(t) - \frac{\sin(2t)}{2}],\ 0 \leq t \leq 2\pi.$$




Figur 1: Kurve $C$ (stor) og evolutkurve $E$ (lille)

1. Gør rede for at farten $v(t)$ langs med kurven er $v(t) = 2\sin(\frac{t}{2})$.
   (en nyttig formel: $\cos(t)\cos(2t) + \sin(t)\sin(2t) = 1 - 2\sin(\frac{t}{2})^2$)

2. Bestem længden af den lukkede kurve $C$.

3. Gør rede for, at krumningen $\kappa(t)$ langs med kurven er givet ved $\kappa(t) = \frac{3}{4\sin(\frac{t}{2})}$, $0 < t < 2\pi$. Hvilken vej drejer kurven? Bestem det punkt $P_t$ på kurven, hvor krumningen er minimal. Gør rede for at $\kappa(t) \to \infty$ for $t \to 0$.

4. Gør rede for, at størrelsen af accelerationens normale komposant $\mathbf{a_n}(t)$ i $P_t$ er givet ved $3\sin(\frac{t}{2})$. I hvilket punkt er dette udtryk størst? Sammenlign med svaret fra 3. ovenfor.

5. Bestem en parameterfremstilling $\mathbf{e}(t)$ for evolutkurven $E$ svarende til kurven $C$. Beskriv sammenhængen mellem den oprindelige kurve $C$ og evolutkurven $E$ (se Figur 1).

**Opgave 2:** (24%)

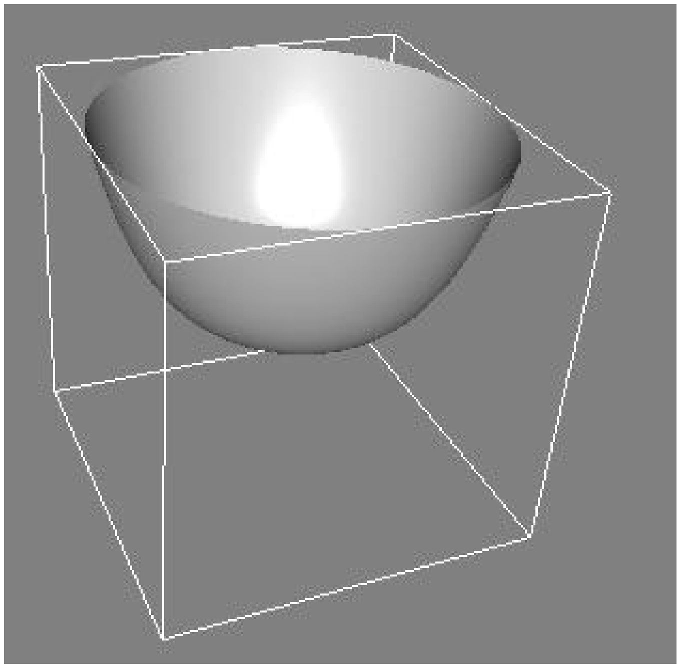
1. En Fergusonkurve er givet ved en kubisk parameterfremstilling $\overrightarrow{OP_t} = \mathbf{p}(t)$. Kurven begynder i $P_0 : (0,0)$, ender i $P_1 : (0,1)$ og har hastighedsvektorer $\mathbf{v}_0 = \mathbf{p}'(0) = [3,0]$ i $P_0$, hhv. $\mathbf{v}_1 = \mathbf{p}'(1) = [-3,0]$ i $P_1$. Gør rede for at $\mathbf{p}(t) = [3t(1-t), t^2(3-2t)],\ 0 \leq t \leq 1$.

2. I hvilket punkt $P_t$ har kurven en lodret tangent?

3. Bestem de fire Bézier-kontrolpunkter, som bestemmer den samme kurve. Gør rede for at kurven er indeholdt i det kvadrat, som disse fire punkter udspænder.

**Opgave 3:** (36 %)
En omdrejningsflade $S$ (skålen i Figur 2) er givet ved parameterfremstillingen

$$[X, Y, Z] = \overrightarrow{OP_{uv}} = \mathbf{r}(u, v) = [v\cos(u), v\sin(u), v^4],\ 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 1.$$



Figur 2: Skålen $S$

1. Bestem en normalvektor og en ligning for fladens affine tangentplaner i henholdsvis $P_{01} : (1, 0, 1)$ og i $P_{\pi 1} : (-1, 0, 1)$. Bestem den spidse vinkel mellem disse tangentplaner.

2. Bestem koefficienterne for fladens første og anden fundamentalform i punktet $P_{uv}$ på fladen $S$.
   (Det er smart at udnytte at fladen er en omdrejningsflade).

3. Bestem hovedkrumningerne i punktet $P_{uv}$.

4. Gør rede for at Gausskrumningen i $P_{uv}$ er givet ved $K(u, v) = \frac{48v^4}{(1+16v^6)^2}$.
   Hvilke punkter på fladen er elliptiske, hyperbolske, parabolske, hhv. planpunkter? I hvilke punkter på fladen (en cirkel bestemt ved parameteren $v$) er Gausskrumningen størst?