Prøve i Matematik – Geometriske Grundbegreber

M-sektorens 4. semester

Torsdag, den 31. maj 2007, kl. 9:00 – 12:00

Alle sædvanlige hjælpemidler må medtages. PC er ikke tilladt.

Opgave 1: (36%)
En rumkurve C er givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP}_t = [e^t, \sqrt{2}\,t, e^{-t}],\ t \in \mathbf{R}.$$

1. Gør rede for at farten i punktet P_t er givet ved $v(t) = e^t + e^{-t}$. Bestem længden af det stykke af kurven C, som forløber mellem $P_0 : (1, 0, 1)$ og $P_T : (e^T, \sqrt{2}\,T, e^{-T})$.

2. Gør rede for at krumningen i P_t er givet ved $\kappa(t) = \frac{\sqrt{2}}{(e^t+e^{-t})^2}$. Udled at denne krumning antager største værdi i $P_0 : (1, 0, 1)$.

3. Bestem kurvens medfølgende koordinatsystem (moving frame) $[\mathbf{t}(0), \mathbf{n}(0), \mathbf{b}(0)]$ i P_0.

4. Bestem en ligning for kurvens oskulationsplan ω_0 i P_0 og bestem den spidse vinkel mellem denne plan og XY-planen.

Opgave 2: (24%)
En naturlig kubisk spline i planen gennem tre punkter P_0, P_1 og P_2 er givet ved to polynomielle parameterfremstillinger $\mathbf{p}_1(t) = [t^3 - 1, -t^3 + t]$ og $\mathbf{p}_2(t),\ 0 \le t \le 1$.

1. Gør rede for, at $P_0 : (-1, 0), P_1 : (0, 0)$ med hastighedsvektorer $\mathbf{v}_0 = [0, 1], \mathbf{v}_1 = [3, -2]$.

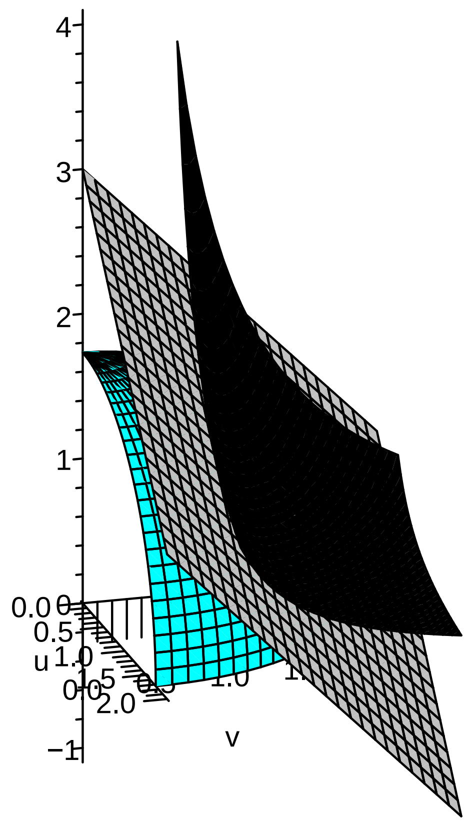
2. Gør rede for, at $P_2 : (5, -4)$ og $\mathbf{v}_2 = [6, -5]$ ved at udnytte sammenhænge mellem punkter og hastighedsvektorer for en kubisk spline.

3. Bestem parameterfremstillingen $\mathbf{p}_2(t)$ for den anden halvdel af splinekurven.

Opgave 3: (40 %)
En flade S er givet ved parameterfremstillingen

$$[X,Y,Z] = \overrightarrow{OP_{u,v}} = [u,v,\frac{1}{uv}],\ u,v > 0.$$

På Figur 1 nedenfor vises et udsnit af fladen S i sort.



Figur 1: Flade S, kugleflade og tangentplan

1. Gør rede for at vektoren $\mathbf{n} = [1,1,1]$ er normalvektor til fladen S i punktet $P_{1,1} : (1,1,1)$ og bestem en ligning for fladens affine tangentplan i dette punkt (indtegnet mørkegråt i Figur 1).

2. Bestem koefficienterne til første og anden fundamentalform for fladen S i punktet P_{uv}.

3. Gør rede for, at fladens Gausskrumning i punktet $P_{1,1} : (1,1,1)$ er givet ved $K(1,1) = \frac{1}{3}$ og dens middelkrumning ved $H(1,1) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Udled at fladens normalkrumninger i dette punkt er éns i alle retninger.

4. Gør rede for at koordinaterne (X, Y, Z) for et punkt $P_{u,v}$ på fladen S tilfredsstiller ligningen $XYZ = 1$.
   Konkluder, at fladen indeholder hyperbelkurven med ligningen $XY = t$ i den horizontale plan $Z = \frac{1}{t}$ for ethvert $t > 0$.

5. På Figur 1 er der, udover fladen S og den omtalte tangentplan, ligeledes indtegnet et udsnit af kuglen med radius $\sqrt{3}$ og centrum i Origo (i lysegråt) . Hvad har denne kugle tilfælles med fladen S i en omegn af punktet $P_{1,1} : (1,1,1)$?