Prøve i Matematik – Geometriske Grundbegreber

M-sektorens 3. semester

Tirsdag, den 14. januar 1997, kl. 8:30 – 11:30

Alle sædvanlige hjælpemidler må medtages

Opgave 1: (40%) En rumkurve k er i et sædvanligt retvinklet højrekoordinatsystem $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP_t} = (t, t^2, \ln t);\ t > 0.$$

1. Bestem vektorerne $\mathbf{t}, \mathbf{n}$ og $\mathbf{b}$ fra det medfølgende koordinatsystem i $P_1 : (1, 1, 0)$.

2. I punktet P_1 ønskes beregnet krumningen $\kappa(1)$ og torsionen $\tau(1)$ samt koordinaterne til oskulationscirklens centrum.

3. Bestem en ligning for oskulationsplanen ω_1 svarende til punktet P_1.

4. Planen ω_1 skærer XY-planen i en ret linie l. Angiv en parameterfremstilling for l og beregn den vinkel φ, som l danner med X-aksen (f.eks. ved at beregne $\cos\varphi$).

Opgave 2: (20%) Givet punkterne $Q_0 : (-2, 1), Q_1 : (-1, 0), Q_2 : (1, 0)$ og $Q_3 : (2, 1)$.

1. Verificer, at Bézierkurven givet ved disse punkter har parameterfremstillingen

$$\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t)) = (-2t^3+3t^2+3t-2,\ 3t^2-3t+1), \quad 0 \le t \le 1.$$

2. Lad $P_0 = Q_0$ og $P_1 = Q_3$. Bestem hastighedsvektorer $\mathbf{v}_0$ i P_0 og $\mathbf{v}_1$ i P_1, således at den kubiske parameterfremstilling givet ved $P_0, \mathbf{v}_0, P_1$ og $\mathbf{v}_1$ i intervallet $[0, 1]$ stemmer overens med $\mathbf{p}(t)$.

3. Vis, at kurven givet ved $\mathbf{p}(t)$ forløber i den øvre halvplan $y > 0$.

Opgave 3: (40%) Drejes sinuskurven i XZ-koordinatsystemet om $Z-$aksen, fås en flade $\mathcal{F}$ med parameterfremstilling

$$\mathbf{r}(u,v) = \overrightarrow{OP_{u,v}} = (u\cos v, u\sin v, \sin u),\ \frac{\pi}{2} < u < \frac{3\pi}{2}, 0 \le v \le 2\pi.$$

1. Beregn koefficienterne i fladens første og anden fundamentalform.

2. Bestem en ligning for fladens tangentplan i punktet $P_{\pi,0}$: $(\pi, 0, 0)$.

3. Beregn Gausskrumningen $K(u,v)$ i $P_{u,v}$ og vis at $P_{u,v}$ er

   - elliptisk for $\frac{\pi}{2} < u < \pi$;
   - parabolsk for $u = \pi$;
   - hyperbolsk for $\pi < u < \frac{3\pi}{2}$.

   Begrund dette resultat grafisk med udgangspunkt i tangentlinier til sinuskurven.

4. Bestem hovedkrumningerne i punktet $P_{\pi,0}$: $(\pi, 0, 0)$. Vis, at vinklen mellem hovednormalen til parallelcirklen i $P_{\pi,0}$ (med ligningen $x^2 + y^2 = \pi^2$ i XY-planen) og fladens normal i $P_{\pi,0}$ er på $\frac{3\pi}{4}$, dvs. 135^0.

Husk at skrive navn og gruppenummer på besvarelserne. **Og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelserne.