Prøve i Matematik – Geometriske Grundbegreber

M-sektorens 3. semester

Fredag, den 9. januar 1998, kl. 8:30 – 11:30

Alle sædvanlige hjælpemidler må medtages

Opgave 1: (36%) En rumkurve k er i et sædvanligt retvinklet højrekoordinatsystem $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP_t} = [6t, 3t^2, t^3],\ t \in \mathbf{R}.$$

1. Vis, at $|\mathbf{r}'(t)| = 3(t^2 + 2)$ og at $|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)| = 18(t^2 + 2)$. Beregn længden af kurvestykket mellem P_0 og P_1.

2. Beregn tangentvektoren $\mathbf{t}(t)$ og binormalvektoren $\mathbf{b}(t)$ i P_t. Vis, at $\mathbf{t}(t) + \mathbf{b}(t)$ er den konstante vektor $\mathbf{u} = [1, 0, 1]$.

3. Lad α, β og γ betegne vinklerne mellem $\mathbf{u} = [1, 0, 1]$ og vektorerne $\mathbf{t}(t)$, hhv. $\mathbf{b}(t)$, hhv. hovednormalvektoren $\mathbf{n}(t)$. Vis, at $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$, mens $\gamma = \frac{\pi}{2}$. (Man behøver ikke at beregne $\mathbf{n}(t)$).

4. Vis, at krumningen $\kappa(t)$ og torsionen $\tau(t)$ af kurven i P_t opfylder:
$$\kappa(t) = \tau(t) = \frac{2}{3(t^2 + 2)^2},$$
og at begge er maksimale i $P_0 = O$.

Opgave 2: (24%) Givet de tre punkter $P_0 : [0, 0]$, $P_1 : [4, 4]$ og $P_2 : [8, 4]$ og den naturlige kubiske spline gennem disse punkter givet ved parameterfremstillinger $\mathbf{p}_1(t)$ og $\mathbf{p}_2(t)$. Det oplyses, at

$$\mathbf{p}_1(t) = [4t, -t^3 + 5t],\ 0 \leq t \leq 1.$$

1. Bestem parameterfremstillingen $\mathbf{p}_2(t)$ for den del af kurven, der forbinder P_1 og P_2.

2. Bestem i punktet P_1 krumningen κ og koordinaterne til krumningscentrum C.

3. Find de 7 Bézierpunkter, der bestemmer den samme kurve.

Opgave 3: (40%) En flade $\mathcal{F}$=0 er i et sædvanligt retvinklet højrekoordinatsystem $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ i rummet givet ved ligningen $z = x^3 + y^3$.

1. Angiv en parameterfremstilling for fladen og beregn koefficienterne for fladens første fundamentalform i punktet $P : [x, y, x^3 + y^3]$.

2. Vis, at enhedsnormalvektoren i P er givet ved

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + 9(x^4 + y^4)}}[-3x^2, -3y^2, 1].$$

   Bestem ligninger for tangentplanerne til $\mathcal{F}$ i punkterne $Q : [1, 1, 2]$, hhv. $R : [1, -1, 0]$. Gør rede for, at disse tangentplaner er parallele.

3. Beregn koefficienterne for fladens anden fundamentalform.

4. Vis, at Gausskrumningen i punktet $P : [x, y, x^3 + y^3]$ antager værdien

$$K(x, y) = \frac{36xy}{(1 + 9(x^4 + y^4))^2}.$$

   Bestem de punkter på fladen, som er elliptiske, hyperbolske, hhv. parabolske.

5. Vis, at middelkrumningen $H(1, -1) = 0$ i punktet $R : [1, -1, 0]$. Beregn hovedkrumningerne κ_+ og κ_- i R.

Husk at skrive navn og gruppenummer på besvarelserne. **Og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelserne.