Omprøve i Matematik – Geometriske Grundbegreber

M-sektorens 3. semester

Torsdag, den 12. februar 1998, kl. 12:30 – 15:30

Alle sædvanlige hjælpemidler må medtages

Opgave 1: (40%) En rumkurve k er i et sædvanligt retvinklet højrekoordinatsystem $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP_t} = [t\cos t, t\sin t, t^2],\ t \in \mathbf{R}.$$

1. Gør rede for at k er beliggende på fladen $\mathcal{F}$ med ligningen $z = x^2 + y^2$.
2. Beregn i punktet $P_0 : [0,0,0]$ kurvens krumning κ_0 og torsion τ_0.
3. Vis, at oskulationsplanen i P_0 er givet ved ligningen $z - y = 0$ og beregn koordinaterne til krumningscirklens centrum C_0.
4. Bestem en parameterfremstilling for tangenten i punktet P_π. Beregn tangentens skæringspunkt med XY-planen.

Opgave 2: (20%)

1. Vis at den naturlige kubiske spline gennem punkterne P_0 : $[0,0]$, $P_1 : [1,1]$ og $P_2 : [2,8]$ er givet ved de følgende parameterfremstillinger:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1(t) &= [t, -0.5t + 1.5t^3] \\ \mathbf{p}_2(t) &= [1+t, 1+4t+4.5t^2-1.5t^3],\ 0 \le t \le 1. \end{aligned}$$

(Vink: Det er lettest at beregne hastighedsvektorerne i P_0, P_1 og P_2 og at gøre rede for at de "passer" til disse punkter.)

2. Bestem de 7 Bézierpunkter $Q_0, \ldots, Q_6$, som beskriver den samme kurve. Indtegn dem i et koordinatsystem og gør rede for, at punkterne ligger på tre rette linier.

Opgave 3: (40%) En flade $\mathcal{F}$=0 er i et sædvanligt retvinklet højrekoordinatsystem $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ i rummet givet ved parameterfremstillingen

$$\overrightarrow{OP_{uv}} = \mathbf{r}(u,v) = [v\cos u, v\sin u, \cos u],\ 0 \leq u < 2\pi, 1 \leq v \leq 4.$$

1. Vis, at enhedsnormalvektoren i P_{uv} er givet ved

$$\nu(u,v) = \frac{1}{\sqrt{v^2 + (\sin u)^2}}[(\sin u)^2, -\sin u\cos u, -v].$$

2. Beregn koefficienterne for fladens første og anden fundamentalform.

3. Vis, at Gausskrumningen og middelkrumningen i et fladepunkt P_{uv} er givet ved

$$K(u,v) = \frac{-(\sin u)^2}{(v^2 + (\sin u)^2)^2} \text{ og}$$

$$H(u,v) = \frac{v\cos u}{2(v^2 + (\sin u)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

4. Vis at $\mathcal{F}$ overalt er hyperbolsk krummet med undtagelse af to liniestykker.

5. Bergne de to hovedkrumninger κ_+ og κ_- i punktet $P_{uv} = P_{\pi 2}$.

Husk at skrive navn og gruppenummer på besvarelserne. **Og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelserne.