Prøve i Matematik – Geometriske Grundbegreber

M-sektorens 3. semester

Tirsdag, den 12. januar 1999, kl. 8:30 – 11:30

Alle sædvanlige hjælpemidler må medtages.
PC er ikke tilladt.

Opgave 1: (36%) En rumkurve er i et sædvanligt retvinklet højrekoordinatsystem $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP_t} = [e^t, \sqrt{2} \cdot t, e^{-t}], \quad t \in \mathbf{R}.$$

1. Gør rede for, at $|\mathbf{r}'(t)| = e^t + e^{-t}$, og at $|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)| = \sqrt{2} \cdot (e^t + e^{-t})$.

2. Beregn længden af kurvestykket fra $P_0 : [1, 0, 1]$ til $P_1 : [e, \sqrt{2}, e^{-1}]$.

3. Beregn enhedstangentvektoren $\mathbf{t}(t)$ og binormalvektoren $\mathbf{b}(t)$ i P_t. Gør rede for, at $\mathbf{t}(t) + \mathbf{b}(t)$ er den *konstante* vektor $\mathbf{u} = [1, 0, -1]$.

4. Gør rede for, at krumning κ og torsion τ stemmer overens i alle kurvens punkter.
(Vink: Man *kan* løse opgaven ved at beregne κ og τ. En anden løsning fås ved at differentiere ligningen $\mathbf{t} + \mathbf{b} = \mathbf{u}$ under udnyttelse af Frenet's ligninger).

Opgave 2: (24%) Givet punkterne $Q_0 : [-1, 0]$, $Q_1 : [2, 1]$, $Q_2 : [-2, 1]$ og $Q_3 : [1, 0]$ i planen.

1. Vis at *Bézierkurven givet* disse punkter har parameterfremstillingen

$$\mathbf{p}(t) = [14t^3 - 21t^2 + 9t - 1,\ -3t^2 + 3t], \quad 0 \leq t \leq 1.$$

2. Gør rede for, at denne kurve danner en "loop", dvs., at den går fra 2. kvadrant til 1. kvadrant, herefter tilbage til 2. kvadrant, mens den slutter i 1. kvadrant.

3. Beregn hastighedsvektoren $\mathbf{v}_0$ og krumningen $\kappa(0)$ i Q_0.

Opgave 3: (40%) En flade $\mathcal{F}$ er i et sædvanligt retvinklet højre-koordinatsystem $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ i rummet givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}[u,v] = \overrightarrow{OP_{uv}} = [v - uv, v + uv, u]; \quad u, v \in \mathbf{R}.$$

1. Vis at koordinaterne til et punkt $P : [x, y, z]$ på fladen $\mathcal{F}$ opfylder ligningen $y - x = z \cdot (x + y)$. Gør rede for, at $\mathcal{F}$ indeholder både Z-aksen og linjen l med parameterfremstillingen

$$[x, y, z] = [1, 1, 0] + t \cdot [-1, 1, 1]; \quad t \in \mathbf{R}.$$

2. Beregn koefficienterne i fladens 1. fundamentalform.

3. Beregn koefficienterne i fladens 2. fundamentalform.

4. Vis at Gausskrumningen og middelkrumningen i punktet $P_{u,v}$ er givet ved

$$K(u,v) = \frac{-1}{(1 + u^2 + 2v^2)^2}; \quad H(u,v) = \frac{-\sqrt{2} \cdot uv}{(1 + u^2 + 2v^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

5. Beregn hovedkrumningerne κ_+ og κ_- i punktet $P_{0,1} : [1, 1, 0]$.

Husk at skrive navn og gruppenummer på besvarelserne. **Og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelserne.