Omprøve i Matematik – Geometriske Grundbegreber

M-sektorens 3. semester

Mandag, den 14. februar 2000, kl. 9:00 – 12:00

Alle sædvanlige hjælpemidler må medtages.
PC er ikke tilladt.

Opgave 1: (40%) En rumkurve er i et sædvanligt retvinklet højrekoordinatsystem givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP_t} = [\cos t, \sin t, \frac{1}{2}t^2], \quad t \in \mathbf{R}.$$

1. Beregn for enhver værdi af t hastigheds- og accelerationsvektorerne $\mathbf{r}'(t)$, hhv. $\mathbf{r}''(t)$.
2. Gør rede for, at $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{1+t^2}$ og at $|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)| = \sqrt{2+t^2}$. Bestem endvidere enhedstangentvektoren $\mathbf{t}(t)$ og binormalvektoren $\mathbf{b}(t)$.
3. Bestem krumningsfunktionen $\kappa(t)$ og torsionsfunktionen $\tau(t)$.
4. Bestem en ligning for oskulationsplanen $\omega_{\frac{\pi}{2}}$ i $P_{\frac{\pi}{2}}$ og beregn den spidse vinkel mellem denne plan og planen med ligningen $x + y - 2z = 5$.

Opgave 2: (20%) Om en naturlig kubisk spline gennem punkterne P_0, P_1, P_2 med hastighedsvektorerne $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ i disse punkter vides:

$$P_0 = O = [0,0], \quad \mathbf{v}_0 = [6,0], \quad \mathbf{v}_1 = [3,3], \quad \mathbf{v}_2 = [0,6].$$

1. Vis, at punkterne P_1 og P_2 har koordinaterne $P_1 : [5,1]$ og $P_2 : [6,6]$.
2. Bestem parameterfremstillingen for den del af kurven, der forbinder de første to punkter (P_0 og P_1.)
3. Beregn de 7 Bézierpunkter, der bestemmer den samme kurve.

Opgave 3: (40%) Hvis den plane kruve med ligningen

$$z = e^{-x},\ x > 0$$

drejes om z-aksen fremkommer en flade S med parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(u,v) = \overrightarrow{OP_{uv}} = [v\cos u, v\sin u, e^{-v}], \quad 0 \leq u < 2\pi,\ 0 < v.$$

1. Gør rede for, at vektorerne $\mathbf{r}_u(u,v)$ og $\mathbf{r}_v(u,v)$ er lineært uafhængige i alle fladens punkter.

2. Bestem en ligning for tangentplanen til fladen i punktet $P_{\frac{\pi}{2},\ln 2}$ (svarende til $u = \frac{\pi}{2},\ v = \ln 2$).

3. Beregn koefficienterne i fladens første og anden fundamentalform.

4. Vis at Gausskrumningen K i et fladepunkt P_{uv} er givet ved

$$K(u,v) = \frac{-e^{-2v}}{v(1+e^{-2v})^2}.$$

Husk at skrive navn og gruppenummer på besvarelserne. **Og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelserne.