Repetition og Perspektivering:

kl. 8:15 – 8:45 i Fib 16, lokale 1.108.
Normalkrumningerne på en flade er defineret som krumningerne af normalsnittene (med fortegn). De beregnes vha. 1. og 2. fundamentalform. Det viser sig, at de fordeles efter et pænt mønster: I en hovedkrumningsretning er normalsnittets krumning størst; i retningen vinkelret derpå (den anden hovedkrumningsretning) er den mindst; og indimellem varierer normalkrumningerne efter Eulers ligning.

Litteratur:

[MR], ch. III.3 – III.5.1, pp. 118 – 136.

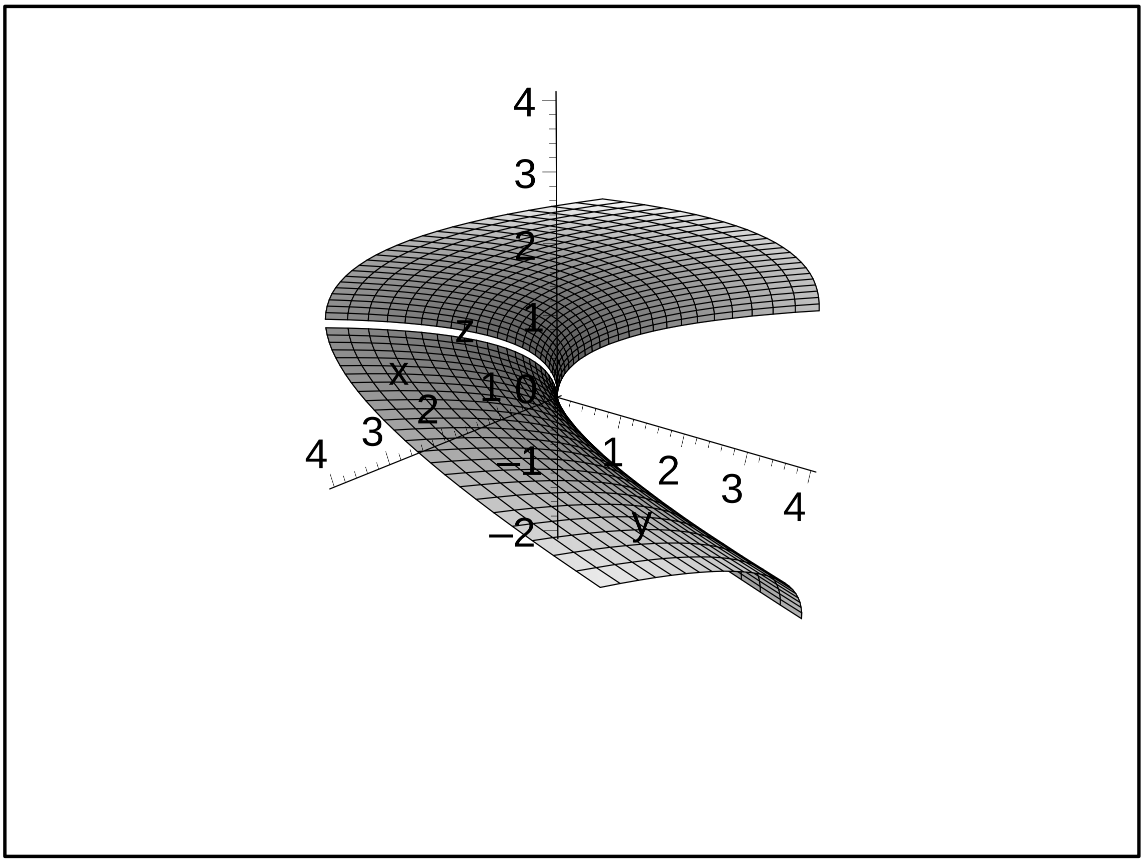
Opgaveregning:

i grupperummene, kl. 8:50 – 10:35.

Opgaver:

1.
En flade S er givet vha. parameterfremstillingen $[x, y, z] = \bar{\mathbf{r}}(u, v) = \overrightarrow{OP_{uv}} = [\cos v - u \sin v, \sin v + u \cos v, u]$, $u \in \mathbf{R}, v \in [0, 2\pi]$.
Ved tidsnød: 3. og 4. kan springes over; det er vigtigt at I når frem til 5. og 6. med nyt stof!

1. Hvilken slags flade handler opgaven om? Gør rede for at koordinaterne for et punkt $P : [x, y, z]$ på fladen opfylder ligningen $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Beskriv fladens snit med planen $z = a,\ a \in \mathbf{R}$, og skitser fladen (en omdrejningshyperboloide!).
2. Beregn koefficienterne E, F, G i fladens 1. fundamentalform.
   $[E = 2,\ F = 1,\ G = 1 + u^2]$
3. Beregn normalvektoren $\mathbf{n}(u, v) = (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)(u, v)$.
   Sammenlign koordinatsættet for punktet P_{uv} med koordinatsættet for $\mathbf{n}(u, v)$ og gør rede for, at normalvektoren $\mathbf{n}$ i punktet $P : [x_0, y_0, z_0] \in S$ har koordinaterne $\mathbf{n} = [-x_0, -y_0, z_0]$.
   Bestem en ligning for fladens tangentplan i $P : [x_0, y_0, z_0]$.
   $[-x_0 x - y_0 y + z_0 z + 1 = 0.]$
4. Beregn arealet for det "bælte" på fladen, som er afgrænset af planerne $z = -1$, hhv. $z = 1$.
   (Vink: $\int \sqrt{u^2 + a^2} du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln|u + \sqrt{u^2 + a^2}|$).
   $[(2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} \ln(5 + 2\sqrt{6}))\pi \cong 16.]$
5. Beregn koefficienterne e, f, g i fladens 2. fundamentalform. Beregn Gausskrumningen $K(u, v)$ og middelkrumningen $H(u, v)$ i punktet P_{uv} (med $\overrightarrow{OP_{uv}} = \bar{\mathbf{r}}(u, v)$.)
   Gør rede for at alle punkter på fladen er hyperbolske.
   $[e = 0,\ f = \frac{1}{\sqrt{2u^2+1}},\ g = \frac{u^2+1}{\sqrt{2u^2+1}},$
   $K = \frac{-1}{(2u^2+1)^2} < 0,\ H = \frac{u^2}{(2u^2+1)^{\frac{3}{2}}}.]$
6. Bestem hovedkrumningerne k_1, k_2 i punktet P_{uv}.
   $[k_1 = \frac{1}{(2u^2+1)^{\frac{1}{2}}},\ k_2 = \frac{-1}{(2u^2+1)^{\frac{3}{2}}}.]$



2. (Eksamen forår 2003):
En flade S er givet ved parameterfremstillingen $\mathbf{r}(u,v) = \overrightarrow{OP_{uv}} = [u^2, v^2, u+v]$,
$0 < u < 2, -2 < v < 2;$ –
se tegningen ovenfor.
Ved tidsnød: Spring evt. 1. over!

1. Bestem en ligning for fladens affine tangentplan i punktet $P_{(1,1)} : (1,1,2)$.

   [Facit: $x + y - 2z = -2$]

2. Bestem koefficienterne E, F, G i fladens 1. fundamentalform samt e, f, g i fladens 2. fundamentalform.
   ($E = 4u^2 + 1, F = 1, G = 4v^2 + 1;$
   $e = \frac{-2v}{\sqrt{u^2+v^2+4u^2v^2}}, f(u,v) = 0,$
   $g(u,v) = \frac{-2u}{\sqrt{u^2+v^2+4u^2v^2}}$.)

3. Gør rede for at den Gaussiske krumning $K(u,v)$ i $P_{(u,v)}$ er givet ved

$$K(u,v) = \frac{uv}{(4u^2v^2 + u^2 + v^2)^2}.$$

4. For hvilke parametre $[u,v]$ er punktet P_{uv} på fladen elliptisk, hhv. hyperbolsk? Marker områderne med elliptiske, hhv. hyperbolske punkter på figuren.

   (Facit: $v > 0 \Rightarrow P_{uv}$ elliptisk;
   $v < 0 \Rightarrow P_{uv}$ hyperbolsk
   (sadelpunkt).)

Forelæsning:

kl. 10:40 – 12:00 i Fib 16, lokale 1.108.

Mål og indhold:

Hovedkrumningerne k_1, k_2 beregnes som rødder i en kvadratisk ligning som indeholder den Gaussiske krumning K og middelkrumningen H som koefficienter. Gausskrumningens fortegn giver iøvrigt en grov inddeling af fladen i elliptiske, hyperbolske, parabolske og planpunkter.

I forelæsningens sidste del eksemplificeres begreberne ved hyppigt forekommende flader: omdrejningsflader (kugle, cylinder, torus, vaser) og retlinede flader (f.eks. en omdrejningshyperboloide!) Sidstnævnte klasse indeholder de udfoldelige flader: sådanne flader opnås når man valser et plant emne.

Litteratur:

[MR], ch. III.5.1 - III.5.2.1, pp. 131 – 140, Thm. 3.59 (p. 144) og ch. III.6, pp. 146 – 156.

Næste gang:

Ikke flere lektioner.
Spørgetime tirsdag, den 29. maj, fra kl. 8:15 i Fib 16, lokale 1.108.
Skriftlig eksamen tirsdag, den 2. juni.
Efter sidste kursusgang udsender jeg en pensumliste.

Med venlig hilsen

Martin Raussen

FREDRIK BAJERSVEJ 7G
9220 AALBORG ØST
9940 8855
RAUSSEN@MATH.AAU.DK
HTTP://WWW.MATH.AAU.DK/~RAUSSEN