

Repetition og Perspektivering:

kl. 8:15 – 8:45 i Fib 16, lokale 1.101.

Krumning: definition og beregning. Eksempler.

Opgaveregning:

kl. 8:50-10:35 i grupperummene.

Opgaver:

1. Opvarmning: Givet en plan kurve med parameterfremstilling $\overrightarrow{OP}_t = \mathbf{r}(t) = [x(t), y(t)]$. Hvad skal der gælde om $\mathbf{r}'(t) = [x'(t), y'(t)]$ i et punkt P_t , hvor kurven har en horizontal (hhv. vertikal) tangent?

2. Opvarmning: Tegn nogle plane kurver og gæt derefter, hvordan deres krumningsfunktion $\kappa(s)$ ser ud. I skal bl.a. tegne en kurve med monotont voksende krumning og en kurve hvis krumning skifter fortegn. I må godt prøve jer frem i det geometriske laboratorium!

3. Hvilke kurver og krumningsfunktioner (på den sidste side af dette sæt) er sammenhørende?

4. Find enhedstangentvektor \mathbf{t} , hovednormalvektor $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{t}}$ (kun i (a)) og krumning i de givne punkter for følgende kurver:

(a) $y = x^3$ i $(0,0)$;
(Vink: find først en parameterfremstilling $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t)]$ for denne kurve!)

(b) $\mathbf{r}(t) = [t, t^2, t^3]$ svarende til $t = 1$.

[Facit for krumningerne:

$$\kappa = 0, \kappa = \frac{\sqrt{266}}{98} \sim 0.166.]$$

Hvordan ser kurverne ud? – geometrisk laboratorium!

5. En spiral i planen er givet ved parameterfremstillingen $\mathbf{r}(t) = [t \cos t, t \sin t]$, $t > 0$.

(a) Bestem $|\mathbf{r}(t)|$ og skitser kurven (Det kan hjælpe at tænke på polære koordinater).

(b) Bestem hastighedsvektoren $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$, farten $v(t)$ og accelerationsvektoren $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ (husk produktregel ved differentiation!)

(c) Bestem krumningen $\kappa(t)$ i punktet P_t med $\overrightarrow{OP}_t = \mathbf{r}(t)$. Gør rede for at krumningen aftager monotont med t – vha. tegningen og vha. formlen.

(d) Bestem størrelsen af den tangentielle og af den normale komponent af accelerationsvektoren.

$$[\text{Facit: } \kappa(t) = \frac{2+t^2}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}]$$

$$|\mathbf{a}_t(t)| = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}; |\mathbf{a}_n(t)| = \frac{2+t^2}{\sqrt{1+t^2}}$$

Check resultaterne i det geometriske laboratorium; især speed, curvature og acceleration.

Forelæsning:

kl. 10:40 – 12:00 i Fib 16, lokale 1.101.

Mål og indhold:

En **plan** kurve kan udstyres med et **medfølgende koordinatsystem** $(\mathbf{t}, \mathbf{n} = \hat{\mathbf{t}})$. **Ændringstakten** for dette system (mht. buelængden) er lig med **krumningen**. Omvendt bestemmer krumningsfunktionen en plan kurve på nær en flytning.

For en **rum**kurve kan man ligeledes (vha. de 1. og 2. afledede af parameterfremstillingen) definere et medfølgende koordinatsystem $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$. Ændringstakten for dette system er givet ved **to** størrelser: krumning og **torsion** ("vridning" eller "snoning"). Torsionen beskriver hvor hurtigt kurven vrider sig væk fra kurvens **oskulationsplan**: den plan, som approksimerer kurven bedst i nærheden af et punkt.

Frenets ligninger beskriver bevægelsen af det medfølgende koordinatsystem som et system af differentiallyigninger; de udgør også nøglen til udregning af krumning og især torsion. På nær en flytning er en **rum**kurve entydigt karakteriseret ved dens krumnings- og dens torsionsfunktion.

Litteratur:

MR Ch. II.3.5 – II.4.2, pp. 75 – 87.

MAPLE:

Man kan gennemføre beregninger af krumning og torsion af en kurve med MAPLE. Et lille program med disse beregninger og nogle eksempler fin-

des som det første MAPLE-worksheet på kursets hjemmeside under MAPLE-arbejdsark. Programmet er bygget op som en række procedurer: `nrm` er en procedure til beregning af normen af en 3-dimensional vektor. `pcurv` og `curv` er procedurer til symbolsk(!) beregning af krumningen svarende til en plan, hhv. rumlig vektorfunktion; `tor` beregner torsionen. Prøv at forstå hvad der sker i de enkelte trin! Som eksempel beregnes krumningen af en skruelinie `hel` og en ellipse `e11`. Resultatet kan man tegne ud for at få en fornemmelse over forløbet!

Næste gang:

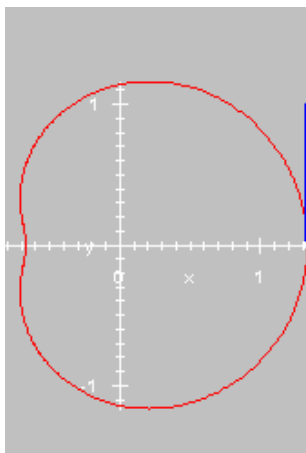
6. lektion. Tirsdag, den 18.3.08. Eksempler vedr. krumning og torsion. Repræsentation af kurver i CAD-systemer. I skal forsyne jer med litteratur:

JR John Rasmussen, *Introduktion til Geometrisk Moellering og Computer-Aided Design*, kap. 4 (Repræsentation af kurver, flader og volumener), pp. 59 – 86. Sættet kan downloades i pdf-format fra Johns hjemmeside.

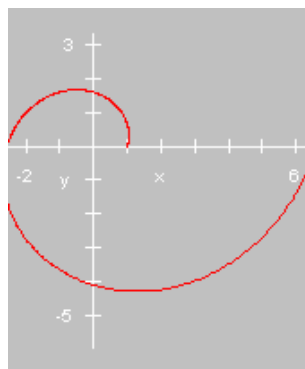
LF *Repræsentation af kurver i CAD-systemer*. 4 siders introducerende tekst med opgaver. Downloades fra kursets hjemmeside.

Med venlig hilsen

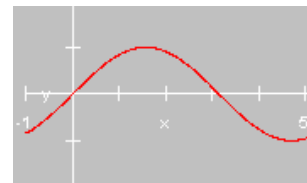
Martin Rausen



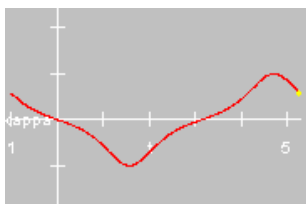
Figur 1: Kurve A



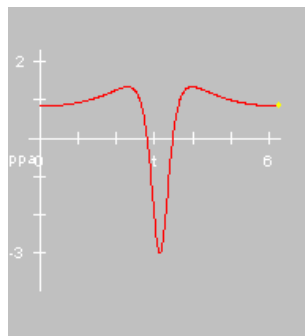
Figur 2: Kurve B



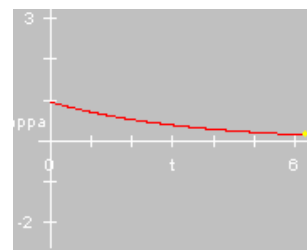
Figur 3: Kurve C



Figur 4: krumning 1



Figur 5: krumning 2



Figur 6: krumning 3