Repetition og Perspektivering:

kl. 8:15 – 8:45 i Fib 16, lokale 1.108.
Rumkurver: krumning og torsion, det ledsagende treben, Frenets ligninger. Herefter afslutter vi den analytiske kurveteori: Hvordan beregnes alle disse størrelser? Det ser vi på generelt og ved eksempler.

Opgaveregning:

kl. 8:50 – 10:35 i grupperummene.

Opgaver:

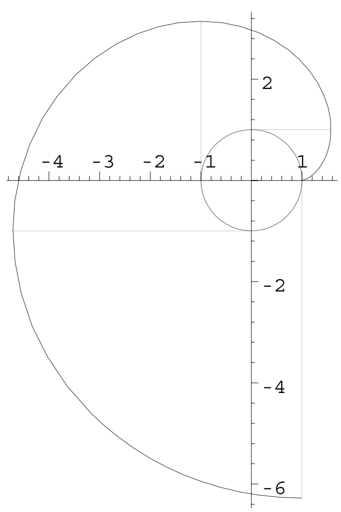
Denne gang bliver der kun 2 opgaver, som fører jer igennem det meste af stoffet om kurveteorien:

(1) Når man trækker en snor tangentialt væk fra en cirkel (tænk på en yoyo som er fikseret i midtpunktet), beskriver endepunktet (der hvor fingeren tager fat) en plan kurve. Se illustrationen i Figur 1 og (dynamisk) i det geometriske laboratorium.

1. Endepunktet bevæger sig på en *cirkelafvikler* – eller cirklens evolvent; bevægelsen er en superposition af en cirkulær bevægelse og en lineær bevægelse i tangentretning. Gør rede for, at den kan beskrives ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(t) = [\cos t + t\sin t, \sin t - t\cos t]$$

når cirklen har radius 1 og centrum i Origo. Kurven bruges til konstruktion af tandhjul! (cf. M.R. Hansen, O. Thybo Thomsen, J. Rasmussen, Maskinelementer, 3. udg., 1998, p. 42 – 43)



Figur 1: Cirkelafvikler

2. Beregn kurvens (dvs. afviklerens) enhedstangentvektor $\mathbf{t}(t)$ og normalvektoren $\mathbf{n}(t) = \hat{\mathbf{t}}(t)$ i punktet P_t med $\overrightarrow{OP_t} = \mathbf{r}(t)$. Hvordan forholder de sig sammenlignet med tangent og normal til cirklen i det punkt "snoren hænger i"? Beregn og tegn!

   (Facit: $\mathbf{t}(t) = [\cos t, \sin t]$
   $\mathbf{n}(t) = [-\sin t, \cos t]$)

3. Vis, at kurvens krumning i P_t opfylder: $\kappa(P_t) = \frac{1}{t}$. Hvor ligger krumningscentrum for oskulationscirklen?

   (Facit: $\overrightarrow{OC_t} = [\cos(t), \sin(t)]$. Interpretation?)

(2) Givet to rumkurver med parameterfremstillinger

(A) $\mathbf{r}(t) = [t, t^2, t^3]$;

(B) $\mathbf{r}(t) = [t\cos t, t\sin t, t]$, $t \in \mathbf{R}$.

Beregn for begge kurver i punktet P_t med $\overrightarrow{OP_t} = \mathbf{r}(t)$:[1][2]

1. accelerationsvektoren $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$;
2. en ligning for oskulationsplanen ω_t gennem P_t
3. det medfølgende koordinatsystem $(\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t))$;
4. parameterfremstillingens krumningsfunktion $\kappa(t)$ og torsionsfunktion $\tau(t)$;
5. accelerationsvektorens tangentiale og normale komposanter $\mathbf{a_t}(t)$, hhv. $\mathbf{a_n}(t)$.

Forelæsning:

kl. 10:40 – 12:00 i Fib 16, lokale 1.108.

Mål og indhold:

Efter afslutningen af kapitlet om rumkurver begynder vi på et nyt emne:
Hvordan husker og behandler et tegneprogram en kurve? Vi skal lære om brug af styrepunkter, som man bruger til at interpolere, hhv. approksimere kurvestykker. Disse repræsenteres vha. parameterfremstillinger, hvis koordinater er 3. grads polynomier. Grundideen er velkendt fra skolen: find et polynomium givet værdier for polynomiet og dens afledede til bestemte (tids)punkter! Husk noterne (**[JR],[LF]**)!

Vi behandler først kubiske parameterfremstillinger (som parametriserer Ferguson-kurver) – vektorfunktioner, hvis koordinater er 3.grads-polynomier. Kurverne fastlægges gennem endpunkternes koordinater og hastighedsvektorer i disse punkter. Designmæssigt mere fleksibelt er de såkaldte Bézier-kurver, hvor styrepunkterne bruges som "magneter" der styrer kurvens udseende.

Litteratur:

MR Ch. II.4.2-4.4, pp. 82 – 90 (Afsnit 4.4 behandles ikke i forelæsningen)

JR, 6. udg. Kap. 4.1-4.2 (s. 59 – 64) og 4.4 (s. 70 – 73)

LF s. 1-2.

De sidste to downloades fra kursets hjemmeside.

[1] Vink: Resultaterne fra 5. lektionsseddel kan genbruges. Hvis regningerne bliver for stygge, kan I nøjes med at beregne størrelserne i et punkt; f.eks. $t = 1$ for den første og $t = 0$ for den anden kurve. Det geometriske laboratorium kan bruges til at anskueliggøre resultaterne. Kontrol: MAPLE-worksheet om krumning og torsion på kursets hjemmeside.

[2] Facit: næste side

Næste gang:

7. lektion. Tirsdag, den 25.3.08.
Kubiske splines. B-splines. ([JR], s. 65 – 78 og [LF], s. 2 – 4)
Vektorfunktioner af to variable som parameterfremstillinger for flader. ([MR], pp. 93 – 99)

Facit til opg. 2

1. (A) $\mathbf{r}''(t) = [0, 2, 6t]$, (B) :$\mathbf{r}''(t) = [-2\sin(t) - t\cos(t), 2\cos(t) - t\sin(t), 0]$.
2. (A): $6t^2x - 6ty + 2z = 2t^3$,
   (B): $(-2\cos(t) + t\sin(t))x + (-2\sin(t) - t\cos(t))y + (t^2 + 2)z = t^3$.
3. (A):

$$\mathbf{t}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}}[1, 2t, 3t^2], \quad \mathbf{b}(t) = \frac{1}{\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}}[3t^2, -3t, 1];$$

$$\mathbf{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{81t^8 + 90t^6 + 54t^4 + 13t^2 + 1}}[-9t^3 - 2t, 1 - 9t^4, 3t + 6t^3].$$

   (B):

$$\mathbf{t}(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 2}}[\cos(t) - t\sin(t), \sin(t) + t\cos(t), 1],$$

$$\mathbf{b}(t) := \frac{1}{\sqrt{t^4 + 5t^2 + 8}}[-2\cos(t) + t\sin(t), -2\sin(t) - t\,cos(t), t^2 + 2],$$

$$\mathbf{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{t^6 + 7t^4 + 18t^2 + 16}}$$

$$[-t^3\cos(t) - t^2\sin(t) - 3t\cos(t) - 4\sin(t), -t^3\sin(t) + t^2\cos(t) - 3t\sin(t) + 4\cos(t), -t].$$

4. (A):

$$\kappa(t) = \frac{2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}}{(9t^4 + 4t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}, \ \tau(t) = \frac{3}{9t^4 + 9t^2 + 1}.$$

   (B):

$$\kappa(t) = \frac{t^4 + 5t^2 + 8}{(t^2 + 2)^{\frac{3}{2}}}, \ \tau(t) = \frac{t^2 + 6}{t^4 + 5t^2 + 8}.$$

5. (A):

$$\mathbf{a_t}(t) = \frac{18t^3 + 4t}{1 + 4t^2 + 9t^4}[1, 2t, 3t^2],$$

$$\mathbf{a_n}(t) = [0, 2, 6t] - \frac{18t^3 + 4t}{1 + 4t^2 + 9t^4}[1, 2t, 3t^2].$$

(B):

$$\mathbf{a_t}(t) = \frac{t}{t^2+2}[\cos(t) - t\sin(t), \sin(t) + t\cos(t), 1]$$

$$\mathbf{a_n}(t) = \frac{t^4+5t^2+8}{t^6+7t^4+18t^2+16}$$

$$[-t^3\cos(t) - t^2\sin(t) - 3t\cos(t) - 4\sin(t), -t^3\sin(t) + t^2\cos(t) - 3t\sin(t) + 4\cos(t), -t].$$

Med venlig hilsen

Martin Raussen