Repetition og Perspektivering:

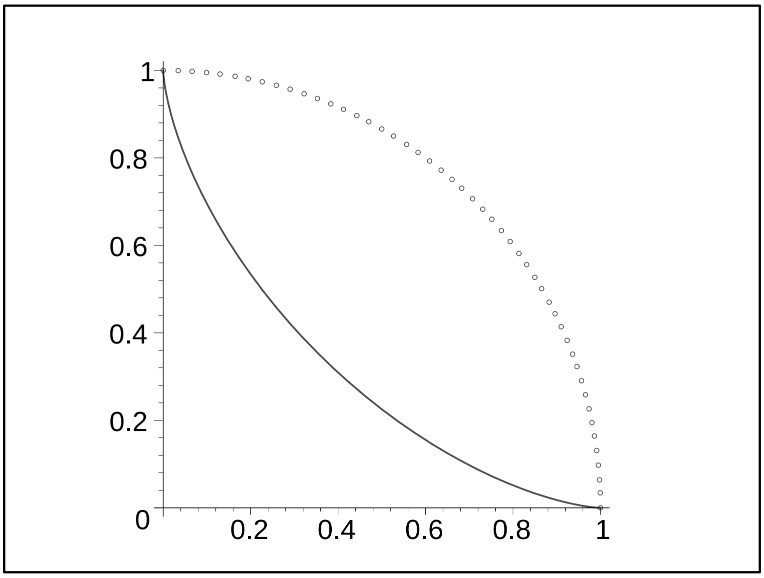
kl. 8:15 – 8:45 i Fib 16, lokale 1.108.
Hvordan husker og behandler et tegneprogram en kurve? Vi skal lære om brug af styrepunkter, som man bruger til at interpolere, hhv. approksimere kurvestykker. Disse repræsenteres vha. parameterfremstillinger, hvis koordinater (stykkevis) er givet ved 3. grads polynomier. Grundideen er velkendt fra skolen: find et polynomium givet værdier for polynomiet og dens afledede til bestemte (tids)punkter! Vi finder frem til kubiske kurver (Ferguson og Bézier).

Opgaveregning:

kl. 8:50-10:35 i grupperummene.

Opgaver:

1. Opvarmning: Hvordan skal Bézierpunkterne Q_0, Q_1, Q_2 og Q_3 placeres for at Bézierkurven fremstiller den rette linie fra $[0,0]$ til $[3,5]$?
   (Vink: Der er flere mulige løsninger for Q_1 og Q_2!)
2. Bestem parameterfremstillingen for den kubiske kurve med $\mathbf{p}(0) = [0,0]$, $\mathbf{p}(1) = [0,1]$, $\mathbf{p}'(0) = [1,1]$ og $\mathbf{p}'(1) = [1,-1]$.
   Hvilke fire Bézierpunkter beskriver den samme kurve ?
   (Facit:
   $\mathbf{p}(t) = [2t^3 - 3t^2 + t, -2t^3 + 2t^2 + t]$.
   $Q_0 = [0,0], Q_1 = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$,
   $Q_2 = [-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}], Q_3 = [0,1]$.)
3. Vis, at krumningen i endepunkterne af Bézierkurven givet ved punkterne Q_0, Q_1, Q_2 og Q_3 er
   $$\kappa(0) = \frac{2}{3}\frac{[\overrightarrow{Q_0Q_1}, \overrightarrow{Q_1Q_2}]}{|\overrightarrow{Q_0Q_1}|^3},$$
   $$\kappa(1) = \frac{2}{3}\frac{[\overrightarrow{Q_2Q_3}, \overrightarrow{Q_2Q_1}]}{|\overrightarrow{Q_2Q_3}|^3}.$$
   (Vink : Beregn først 1. og 2. afledede af Bézierpolynomierne af grad 3 i $t = 0$ og $t = 1$. Bemærk at formlen i begge tilfælde kun bruger tre af de fire kontrolpunkter.)
4. (Eksamensopgave fra aug. 03 til repetition): En plan kurve er givet ved parameterfremstillingen
   $$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP_t} = [\cos^3(t), \sin^3(t)], \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$
   Kurven er tegnet fuldt optrukket i figuren på næste side.
   (a) Bestem kurvens hastighedesvektor $\mathbf{r}'(t)$ og gør rede for at farten $v(t)$ i punktet P_t er givet ved
   $v(t) = 3\sin(t)\cos(t) = \frac{3}{2}\sin(2t)$.
   (Facit: $\mathbf{r}'(t) = 3\sin(t)\cos(t)[-\cos(t), \sin(t)]$.)
   (b) Beregn længden l af kurvestykket mellem $P_0 : (1,0)$ og $P_{\frac{\pi}{2}} : (0,1)$ og sammenlign den med længden L af kvartcirklen (stiplet i figuren).
   (Facit: $l = \frac{3}{2} < \frac{\pi}{2} = L$.)



(c) Det oplyses at accelerationsvektoren i punktet P_t er på formen

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = [3\cos(t)(3\sin^2(t) - 1), 3\sin(t)(3\cos^2(t) - 1)].$$

Gør rede for at krumningen i punktet P_t for $0 < t < \frac{\pi}{2}$ er givet ved

$$\kappa(t) = \frac{-1}{3\sin(t)\cos(t)} = \frac{-2}{3\sin(2t)}.$$

I hvilket punkt er krumningens absolutte værdi $|\kappa(t)|$ mindst?
(Facit: $|\kappa(t)|$ er mindst for $t = \frac{\pi}{4}$ i punktet $P_{\frac{\pi}{4}} : [\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}]$.)

(d) Bestem hastighedsvektoren $\mathbf{v}(\frac{\pi}{4})$ og accelerationsvektoren $\mathbf{a}(\frac{\pi}{4})$ i punktet $P_{\frac{\pi}{4}} : (\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4})$. Eftervis ved udregning, at disse to vektorer står vinkelret på hinanden. Indtegn begge vektorer i kurvetegningen ovenover.
(Facit: $\mathbf{v}(\frac{\pi}{4}) = \frac{3}{4}\sqrt{2}[-1, 1], \mathbf{a}(\frac{\pi}{4}) = \frac{3}{4}\sqrt{2}[1, 1]$.)

Forelæsning:

kl. 10:40 – 12:00 i Fib 16, lokale 1.108.

Mål og indhold:

Når man vil finde en rimelig glat kurve, der går igennem et antal punkter i plan eller rum, bruger man tit en kubisk spline som løsning. Den er sammensat af kubiske kurver mellem to på hinanden følgende punkter, og således, at krumningen bliver en kontinuert funktion. Større glathed eller mere lokal kontrol (men ikke begge dele samtidig) kan opnås vha. de såkaldte B-splines. Dette sidste emne gennemgås ikke i detaljer.

Den sidste del af kurset omhandler flader. Flader optræder i den "virkelige verden" som f.eks. rør, bildæk, membraner, valset metal, overflader til rumlige emner – og som overflade af den jord vi lever på (modelleres som regel som omdrejningsellipsoide). Vi begynder med generelle beskrivelser af flader, som "man kan regne på". Disse er givet ved parameterfremstillinger, som er differentiable vektorfunktioner af to variable. Parameterkurverne lægger et krumt koordinatsystem på fladen.

Litteratur:

JR, 6. udg. John Rasmussen, Kap. 4.3 &- 4.5 (s. 65 – 70, 73 – 78)

LF Lisbeth Fajstrup, s. 1-4.

MR ch. 3.1.1 – 3.1.2, pp. 95 – 103

Software:

Java-baserede demos til Ferguson -og Bézierkurver kan man finde fra hjemmesiden eller direkte her.

Næste gang:

8. lektion. Tirsdag, den 1.4.08.
Tangentplaner for flader. 1. fundamentalform. Længder, vinkler, arealer. Arealberegning.
(MR), ch. 3.1.3 – 3.2.2, pp. 103 – 118.

Med venlig hilsen

Martin Raussen

Fredrik Bajersvej 7G
9220 Aalborg Øst

9940 8855

raussen@math.aau.dk
- http://www.math.aau.dk/~raussen