Repetition og Perspektivering:

kl. 8:15 – 8:45 i Fib 16, lokale 1.108.
Kubiske splines og Bézierkurver: Hvilke muligheder og begrænsninger ligger der i anvendelsen af disse kurver? Et alternativ: B-splines.
Introduktion til flader.

Opgaveregning:

kl. 8:50 – 10:35 i grupperummene.

Opgaver:

1. Opvarmning: Bestem de partielle afledede af funktionen
$$f(u,v) = e^{uv}\cos(u^2 v)$$
mht. u, hhv. v.

2. Der ønskes beregnet en kubisk spline gennem fire punkter P_0, P_1, P_2, P_3.

   (a) Vis, at matricen
$$C := \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 26 & -7 & 2 & -1 \\ -7 & 14 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 14 & -7 \\ -1 & 2 & -7 & 26 \end{bmatrix}$$
kan bruges til at beregne hastighedsvektorene $\mathbf{v_i}$ i P_i på formen
$$\begin{bmatrix} \mathbf{v_0} \\ \mathbf{v_1} \\ \mathbf{v_2} \\ \mathbf{v_3} \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \overrightarrow{P_0P_1} \\ \overrightarrow{P_0P_2} \\ \overrightarrow{P_1P_3} \\ \overrightarrow{P_2P_3} \end{bmatrix}.$$
(Vink: Man behøver ikke at beregne $\mathbf{A_4}$s inverse, når $\mathbf{C}$ er opgivet! Hvad betyder det, at to matricer er hinandens inverse? Check ved matriksmultiplikation, at $\mathbf{C} = 3\mathbf{A_4}^{-1}$; gerne med MAPLE eller lommeregner).

   (b) Udled formler for hastighedsvektorene ved at "samle punkternes koordinater til forbindelsesvektorer". (Der er flere mulige beskrivelser; en "komprimeret form" er:
$$\begin{aligned}
\mathbf{v_0} &= \frac{1}{15}(19\overrightarrow{P_0P_1} + 5\overrightarrow{P_2P_1} + \overrightarrow{P_2P_3});\\
\mathbf{v_1} &= \frac{1}{15}(7\overrightarrow{P_0P_2} + 3\overrightarrow{P_1P_2} + 2\overrightarrow{P_3P_2});\\
\mathbf{v_2} &= \frac{1}{15}(2\overrightarrow{P_1P_0} + 3\overrightarrow{P_1P_2} + 7\overrightarrow{P_1P_3});\\
\mathbf{v_3} &= \frac{1}{15}(\overrightarrow{P_0P_1} + 5\overrightarrow{P_2P_1} + 19\overrightarrow{P_2P_3}).)
\end{aligned}$$

   (c) Beregn de 3 kubiske parameterfremstillinger (evt. mindst en af dem), som udgør den kubiske spline gennem punkterne $P_0 : [0,0], P_1 : [3,0], P_2 : [6,0], P_3 : [6,3]$. Gæt splinens (trækstok gennem de fire punkter) udseende inden du tegner kurven bestemt ved formlerne.

3. (Eksamensopgave forår 2003) En rumkurve er givet ved parameterfremstillingen
$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP_t} = [t, t^2, \frac{2}{3}t^3], \quad t \in \mathbf{R}.$$

   (a) Beregn hastighedsvektoren $\mathbf{r}'(t)$ og vis, at farten er givet ved $v(t) = 1 + 2t^2$.

   (b) Beregn $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)$, og vis at $\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\| = 2(1 + 2t^2)$.

   (c) Beregn krumningsfunktionen $\kappa(t)$ og torsionsfunktionen $\tau(t)$ og vis, at de er ens.

(d) Beregn i ethvert punkt enhedstangentvektoren $\mathbf{t}(t)$ og vis, at den danner en vinkel på $45°$ med den konstante vektor $\mathbf{a} = [1, 0, 1]$.

(Facit: $\mathbf{r}'(t) = [1, 2t, 2t^2]$,
$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = [4t^2, -4t, 2]$,
$\kappa(t) = \tau(t) = \frac{2}{(2t^2+1)^2}$,
$\mathbf{t}(t) = \frac{1}{1+2t^2}[1, 2t, 2t^2]$.)

Forelæsning:

kl. 10:40 – 12:00 i Fib 16, lokale 1.108.

Mål og indhold:

De sidste tre lektioner omhandler flader. Flader optræder i den "virkelige verden" som f.eks. rør, bildæk, membraner, valset metal, overflader til rumlige emner – og som overflade af den jord vi lever på (modelleres som regel som omdrejningsellipsoide). En generel beskrivelse af flader, som "man kan regne på" er givet ved parameterfremstillinger, som er differentiable vektorfunktioner af to variable. Parameterkurverne lægger et krumt koordinatsystem på fladen. Vha. dette koordinatsystem og den tilknyttede 1. fundamentalform (den "krumme Pythagoras") kan man beregne kurvelængder for kurver på fladen, arealer af fladestykker mv. I hvert punkt kan fladen approksimeres ved dens tangentplan. Krumningen, som vi tager op næste gang, måler, hvor "hurtigt" tangentplan (eller fladens normalvektor) "skifter retning".

Litteratur:

MR ch. III.1 – III.2, pp. 95 – 118.

supplerende Edwards & Penney, Ch. 13, især Sect. 13.4 (Partial Derivatives): Repetition af stof fra basisuddannelsen.

Software:

Fladedelen af det geometriske laboratorium er endnu under udvikling. Med det eksisterende applet kan man eksperimentere med parametriserede flader og følge kurver og tangenter til disse på fladen. En anden mulighed er MAPLE. Se især følgende arbejdsark og flere arbejdsark her.

Næste gang:

9. lektion. Tirsdag, den 8.4.08
Krumningsmål på flader.
MR, ch. III.3 – III.5.1 , pp. 118 – 136.

Med venlig hilsen

Martin Raussen