Geometriske grundbegreber
2. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

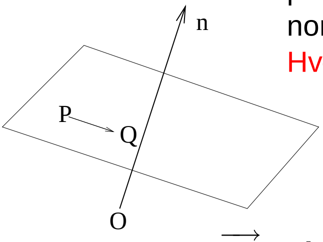
14.2.08

2. lektion – A: Linier og planer

Fokus på metoder fra den linære algebra

1. Parameterfremstillinger
   – linie – plan
2. Ligninger: Normalvektor!
   – linie i plan – plan i rummet
3. Snit – fællesmængde
   – to linier i plan/rum
   – to planer i rummet
   – en linie og en plan i rummet

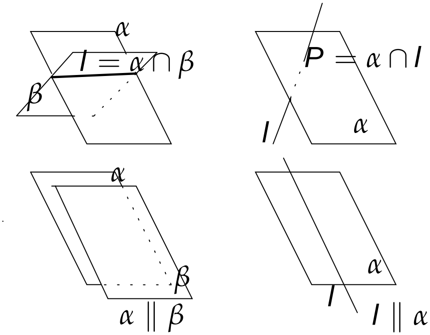
Ligning for en plan α



punkt $P : [x_0, y_0, z_0] \in \alpha$,
normalvektor $\mathbf{n} : [a, b, c] \perp \alpha$
Hvornår er $Q : [x, y, z] \in \alpha$?

$$
\begin{aligned}
Q \in \alpha \quad & \Leftrightarrow \quad \mathbf{n} \perp \overrightarrow{PQ} = [x - x_0, y - y_0, z - z_0] \\
& \Leftrightarrow \quad 0 = \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PQ} \\
& \Leftrightarrow \quad 0 = [a, b, c] \cdot [x - x_0, y - y_0, z - z_0] \\
& \Leftrightarrow \quad 0 = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) \\
& \qquad\quad = ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) \\
& \qquad\quad = \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{OQ} - \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{OP}
\end{aligned}
$$

Snit: planer og linier



Snit: en linie l eller den tomme mængde. et punkt P eller den tomme mængde.

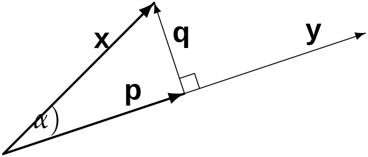
Desuden kan to planer stemme overens; hhv. linien l kan være indeholdt i planen α.

2. lektion – B

1. Ortogonalprojektion
   – ortogonaldekomposition
   – ortogonalprojektion på vektor
   – ortogonalprojektion: punkt på linie, hhv. plan
   – ortogonalprojektion: linie på plan
2. Afstand og vinkler
   – afstand mellem punkt og linie, hhv. plan
   – afstand mellem to linier i rummet
   – vinkel mellem to linier, linie og plan, to planer

Ortogonaldekomposition

af vektoren **x** på vektoren **y**:



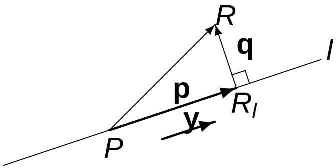
$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{q} \quad \mathbf{p} \parallel \mathbf{y} \quad \mathbf{q} \perp \mathbf{y}.$$

- $\mathbf{p} = \dfrac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}} \mathbf{y}$
- $|\mathbf{p}| = \dfrac{|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}|}{|\mathbf{y}|} = |\mathbf{x}| \cos \alpha$
- $\mathbf{q} = \mathbf{x} - \mathbf{p} = \mathbf{y} \times \dfrac{\mathbf{x} \times \mathbf{y}}{\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}}$
- $|\mathbf{q}| = \sqrt{|\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{p}|^2} = |\mathbf{x}| \sin \alpha = \dfrac{|\mathbf{x} \times \mathbf{y}|}{|\mathbf{y}|}$

Ortogonalprojektion af punkt på linie

Punktet R projiceres på linien l med punkt P og retningsvektor $\mathbf{y}$. Fodpunkt R_l og afstand $d(R,l)$ bestemmes:

- $\mathbf{p} = \dfrac{\overrightarrow{PR}\cdot\mathbf{y}}{\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}}\mathbf{y}$
- $\overrightarrow{OR_l} = \overrightarrow{OP} + \mathbf{p}$

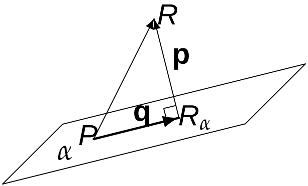


- $\mathbf{q} = \mathbf{y}\times\dfrac{\overrightarrow{PR}\times\mathbf{y}}{\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}} = \overrightarrow{PR} - \mathbf{p}$
- $d(R,l) = |\mathbf{q}| = \dfrac{|\overrightarrow{PR}\times\mathbf{y}|}{|\mathbf{y}|}$

Ortogonalprojektion af punkt på plan

Punktet R projiceres på plan α.
Fodpunkt R_α og afstand $d(R, l)$ bestemmes med udgangspunkt i punkt $P \in \alpha$ og normalvektor **n** til planen:

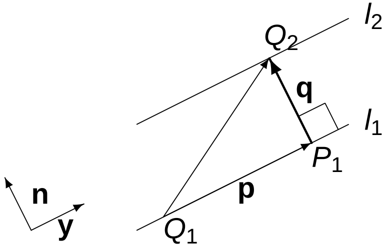
- $$\mathbf{p} = \frac{\overrightarrow{PR} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{n}$$



- $\overrightarrow{OR_\alpha} = \overrightarrow{OR} - \mathbf{p}$
- $\mathbf{q} = \overrightarrow{PR} - \mathbf{p}$
- $$d(R, \alpha) = |\mathbf{p}| = \frac{|\overrightarrow{PR} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$$

Afstand mellem to parallele linier

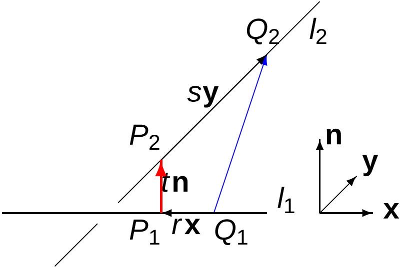
Linierne l_1 og l_2 er parallele og ikke sammenfaldende.
Så er de indeholdt i en plan α. Lad **n** være normalvektor til deres retningsvektor **y** i planen α. Afstanden $d(l_1, l_2)$ bestemmes således ud fra $Q_1 \in l_1,\ Q_2 \in l_2$:



- $|\mathbf{p}| = \dfrac{\overrightarrow{Q_1Q_2} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}$.
- $|\mathbf{q}| = \dfrac{|\overrightarrow{Q_1Q_2} \times \mathbf{y}|}{|\mathbf{y}|}$.
- $$d(l_1, l_2) = |\mathbf{q}| = \frac{|\overrightarrow{Q_1Q_2} \times \mathbf{y}|}{|\mathbf{y}|}.$$

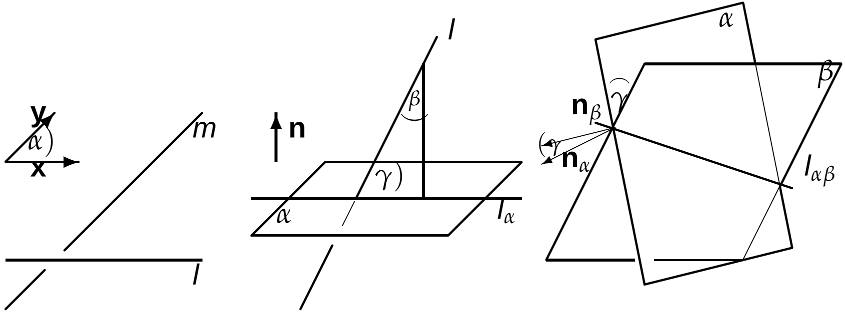
Afstand mellem to vindskæve linier

Lad l_1 betegne en linie gennem Q_1 med retningsvektor $\mathbf{x}$ og l_2 en linie gennem Q_2 med retnigsvektor $\mathbf{y}$. $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ er ikke parallele og vektoren $\mathbf{n}$ er vinkelret på dem begge to (fx. $\mathbf{n} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$). Afstanden $d(l_1, l_2)$ bestemmes som længden af ortognalprojektionen af vektoren $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ på normalvektoren $\mathbf{n}$:



$$d(l_1, l_2) = |t\mathbf{n}| = \frac{|\overrightarrow{Q_1Q_2} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y})|}{|\mathbf{x} \times \mathbf{y}|} = \frac{|[\overrightarrow{Q_1Q_2}, \mathbf{x}, \mathbf{y}]|}{|\mathbf{x} \times \mathbf{y}|}$$

Vinkler



$$\angle(l, m) = \angle(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \alpha$$

$$\gamma = \angle(l, \alpha) = \angle(l, l_\alpha) = \frac{\pi}{2} - \beta,$$
$$\beta = \angle(l, \mathbf{n})$$

$$\gamma = \angle(\alpha, \beta) = \angle(\mathbf{n}_\alpha, \mathbf{n}_\beta).$$