Geometriske grundbegreber
4. lektion

Martin Raussen

Institut for matematiske fag
Aalborg Universitet

28.2.2008

4A – Krumning af en kurve: koncept

- Den naturlige parameterfremstilling
  Buelængde som parameter – fokuserer på geometriske egenskaber
- “Hovedfidusen”
- Hovednormalvektoren og krumning
- Det medfølgende koordinatsystem for en plan kurve
- Acceleration, kræfter og krumning

Buelængdefunktion og -parameter

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(u)|\, du = \int_a^t v(u)\, du$$

Buelængde fra tidspunkt a til tidspunkt t.
$s(t)$ er en monotont voksende funktion med
$0 \le s'(t) = |\mathbf{r}'(t)| = v(t)$ ←farten

$\mathbf{r}_{al}(s)$: buelængde s som parameter
peger på punkt på kurven i afstand s langs med kurven fra begyndelsespunktet.
Fart for denne parameterfremstilling = 1: $|\mathbf{r}'_{al}(s)| = 1$.
$\mathbf{r}'_{al}(s) = \mathbf{t}(s) \leftarrow$ enhedstangentvektor

“Hovedfidus” og medfølgende koordinatsystem

for en kurve med parameterfremstilling $\mathbf{r}(s)$
(s = buelængdeparameter) og enhedstangentvektor $\mathbf{t}(s)$:

$$1 = |\mathbf{t}(s)|^2 = \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}(s) \Rightarrow$$

differentier mht. s $\quad 0 = \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}'(s) \Rightarrow \mathbf{t}(s) \perp \mathbf{t}'(s).$

Hovednormalvektor $\mathbf{n}(s)$ =

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{t}}(s) & \text{for plan kurve} \\ \frac{\mathbf{t}'(s)}{|\mathbf{t}'(s)|} & \text{for rumkurve med } |\mathbf{t}'(s)| \neq 0 \end{cases}$$

Krumningsvektor $\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$. $\quad \kappa(s)$ = krumning
Det medfølgende koordinatsystem i planen: $[\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)]$
Det medfølgende koordinatsystem i rummet:
$[\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)]$
OBS: buelængdeparameter s påkrævet!

Gaussafbildning og krumning

Gaussafbildningen afsætter til hvert tidspunkt enhedstangenten **t** langs kurven udfra Origo.
Vektoren **t** peger så på et punkt på enhedscirklen med vinkel θ i forhold til X-aksen.
Bruges buelængden s som parameter, resulterer dette i en afbildning $\mathbf{t}(s) = [\cos\theta(s), \sin\theta(s)]$.
$\theta(s)$: vinkel mellem X-akse og tangentvektor $\mathbf{t}(s)$
Differentiation: $\kappa(s)\mathbf{n}(s) = \mathbf{t}'(s) = \theta'(s)[-\sin\theta(s), \cos\theta(s)] = \theta'(s)\hat{\mathbf{t}}(s) = \theta'(s)\mathbf{n}(s)$.
Konklusion: krumning $= \kappa(s) = \theta'(s) =$ vinkelhastighed!

Acceleration og krumning

Kurve med parameterfremstilling $\mathbf{r}(t)$.

Hastighedsvektor:

$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = v(t)\mathbf{t}(t) \leftarrow$ fart $\times$ enhedstangent

Enhedstangentvektor $\mathbf{t}$s afledede mht. t:

$\mathbf{t}'(t) = \frac{d\mathbf{t}}{dt}(t) = s'(t)\frac{d\mathbf{t}}{ds}(t) = v(t)\kappa(t)\mathbf{n}(t)$

Accelerationsvektor:

$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = v'(t)\mathbf{t}(t) + v(t)\mathbf{t}'(t)$

$= v'(t)\mathbf{t}(t) + \kappa(t)v^2(t)\mathbf{n}(t)$

$= \mathbf{a}_t(t) + \mathbf{a}_n(t)$.

Accelerationsvektorens tangentiale og normale komponent.

Normalaccelerationen $v^2(t)\kappa(t)$ bør begrænses! Formler:

$\mathbf{a}_t(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\mathbf{t}(t); \mathbf{a}_n(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}\mathbf{n}(t)$

$|\mathbf{a}_t(t)| = \frac{\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|},\ |\mathbf{a}_n(t)| = \frac{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}$.

4B – Krumning: beregning, interpretation

- Beregning af krumningen
  - for en plan kurve
  - for en rumkurve
- Krumningscirkler og evolutkurven
- Krumningsfunktionen fastlægger en plan kurve på nær en flytning

Krumning: beregning

i plan og rum

1. hastighed: $\mathbf{r}' = v\mathbf{t}$.
2. acceleration: $\mathbf{r}'' = v'\mathbf{t} + v^2\kappa\mathbf{n}$.
3. plan: $[\mathbf{r}', \mathbf{r}''] = v^3\kappa[\mathbf{t}, \mathbf{n}] = v^3\kappa$. Isoler κ!
4. $$\kappa = \frac{[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']}{v^3} = \frac{[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']}{|\mathbf{r}'|^3} \leftarrow \text{planprodukt!}$$
5. rum: $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = v^3\kappa(\mathbf{t} \times \mathbf{n}) = v^3\kappa\mathbf{b} \Rightarrow |\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| = v^3\kappa$.
6. $$\kappa = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{v^3} = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3} \leftarrow \text{længde af krydsprodukt}$$

Krumningsformler

i plan og rum

- Plan kurve med parameterfremstilling $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t)]$:

$$\kappa(t) = \frac{[\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t)]}{|\mathbf{r}'(t)|^3} = \frac{\begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{vmatrix}}{\left(\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\right)^3}.$$

- Rumkurve med parameterfremstilling $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$:

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3} = \frac{|[x'(t), y'(t), z'(t)] \times [x''(t), y''(t), z''(t)]|}{\left(\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\right)^3}$$

Krumningscirkel og evolutkurve

Krumningscirkel til en glat kurve gennem punktet P:
den bedst approksimerende
(samme tangent, (hoved)normal,
radius = kurvens krumningsradius $\rho(P) = \frac{1}{\kappa(P)}$).
Krumningscentrum C_P givet ved

$$\overrightarrow{OC_P} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{\kappa(P)}\mathbf{n}(P).$$

Kurvens evolutkurve udgøres af alle kurvens krumningscentre.
Parameterfremstilling (generelt og specielt i planen):

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{r}(t) + \frac{\mathbf{n}(t)}{\kappa(t)} = \mathbf{r}(t) + \frac{|\mathbf{r}'(t)|^2}{[\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t)]}\widehat{\mathbf{r}'}(t).$$

Krumningsfunktion bestemmer kurven

i planen - og på nær en flytning

Givet en differentiabel funktion $k : [a, b] \to \mathbf{R}$. Så findes der netop én kurve (med buelængdeparameterfremstilling $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbf{R}^2$), således at

- kurvens krumningsfunktion er $\kappa(s) = k(s)$ og med givet
- begyndelsespunkt $\mathbf{r}(a) = \overrightarrow{OP}$ og -(enheds)retning $\mathbf{r}'(a) = \mathbf{u}$.

Eksempel: Klotoide

$\kappa(s) = s$.