Geometriske grundbegreber
5. lektion

Martin Raussen

Institut for matematiske fag
Aalborg Universitet

6.3.2008

5A – Mere om krumning

- Krumningscirkler og evolutkurven
- Krumningsfunktionen fastlægger en plan kurve (på nær en flytning); demonstration i MAPLE
- En anvendelse: klotoiden
- Eksempler på krumningsberegninger: i hånden, med MAPLE
- Oskulationsplan for en rumkurve
  - parameterfremstilling og ligning
  - betydning, bl.a. som projektionsplan

Krumningscirkel og evolutkurve

Krumningscirkel til en glat kurve gennem punktet P:
den bedst approksimerende
(samme tangent, (hoved)normal,
radius = kurvens krumningsradius $\rho(P) = \frac{1}{\kappa(P)}$).
Krumningscentrum C_P givet ved

$$\overrightarrow{OC_P} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{\kappa(P)}\mathbf{n}(P).$$

Kurvens evolutkurve udgøres af alle kurvens krumningscentre.
Parameterfremstilling (generelt og specielt i planen):

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{r}(t) + \frac{\mathbf{n}(t)}{\kappa(t)} = \mathbf{r}(t) + \frac{|\mathbf{r}'(t)|^2}{[\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t)]}\widehat{\mathbf{r}'}(t).$$

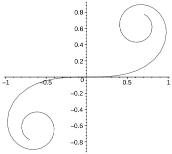
Krumningsfunktion bestemmer plan kurve

på nær en flytning

Hvor meget information ligger der i krumningsfunktionen

$$\mathbf{r}(s) \leftrightarrow \kappa(s)?$$

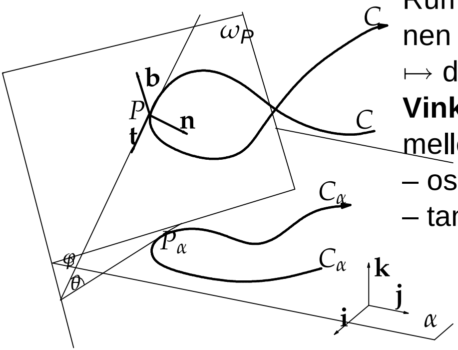
Faktisk kan man rekonstruere kurven (dvs. $\mathbf{r}(s)$) fra krumningsfunktionen $\kappa(s)$, bare man kender et begyndelsespunkt P_0 og en begyndelsesretning $\mathbf{t}_0$ i P_0.
Gæt: Hvilken form har kurven, hvis krumningsfunktion er din yndlingsfunktion?
Anvendelse: f.eks. klotoide til design af fra-/tilkørsler.



Oskulationsplan ω_{P_0}

- den bedst approksimerende plan i P_0, dvs.
  - indeholder tangent $\mathbf{t}$ og hovednormal $\mathbf{n}$
  - indeholder hastighedsvektor $\mathbf{r}'$ og accelerationsvektor $\mathbf{r}''$
  - $\perp$ binormalvektor $\mathbf{b}$
- **Parameterfremstilling for o-plan** (når $\mathbf{r}(t_0) = \overrightarrow{OP_0}$):
  $\mathbf{r}(t_0) + s\mathbf{r}'(t_0) + t\mathbf{r}''(t_0)$
- **Ligning:**
  Normalvektor til o-plan: $\mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0)$
  $Q : (x, y, z) \in \omega_P \Leftrightarrow 0 = \overrightarrow{P_0Q} \cdot (\mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0)) =$
  $(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t_0)) \cdot (\mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0)) = [(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t_0)), \mathbf{r}'(t_0), \mathbf{r}''(t_0)]$
  med $\mathbf{x} = [x, y, z]$.

Plane projektioner og krumning



Rumkurven C projiceres på planen α
$\mapsto$ den plane kurve C_α.

Vinkler:

mellem projektionsplan α og
– oskulationsplan ω_P i P: ϕ
– tangentvektor **t** i P: θ.

Krumning af C_α i P_α:

$$|\kappa_\alpha| = \kappa \frac{\cos \phi}{(\cos \theta)^3}.$$

Oskulationsplanen ω_P er den bedste projektionsplan!

5B – Rumkurver

- Det medfølgende “treben” **t**, **n**, **b**
- Torsion: definition og beregning
- Frenets formler
- Krumningsfunktion og torsionsfunktion fastlægger en rumkurve

Frenets formler

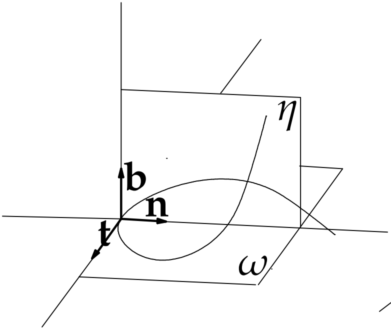
Differentiation mht. buelængde!
Bemærk: $\mathbf{b}'(s)$ og $\mathbf{n}(s)$ er proportionale!

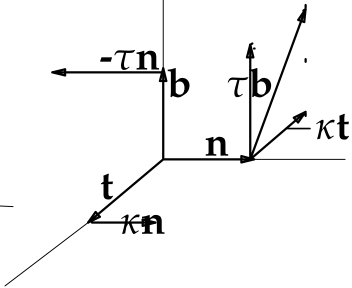
$$\begin{aligned}
\mathbf{t}'(s) &= && \kappa(s)\mathbf{n}(s) \\
\mathbf{n}'(s) &= -\kappa(s)\mathbf{t}(s) && && +\tau(s)\mathbf{b}(s) \\
\mathbf{b}'(s) &= && -\tau(s)\mathbf{n}(s)
\end{aligned}$$

Torsionen $\tau(s)$ beskriver ændringstaksten i binormalvektorens/oskulationsplanens retning.
Frenets formler beskriver ændringstakten i det medfølgende koordinatsystem $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ ved hjælp af krumningsfunktionen $\kappa(s)$ og torsionsfunktionen $\tau(s)$.
En anden interpretation:
vinkelhastighedsvektor Ω=$\tau\mathbf{t} + \kappa\mathbf{b} \Rightarrow$

$$\mathbf{t}' = \Omega \times \mathbf{t},\ \mathbf{n}' = \Omega \times \mathbf{n},\ \mathbf{b}' = \Omega \times \mathbf{b}.$$

Medfølgende koordinatsystem og planer





medfølgende koo.system **t**, **n**, **b**, oskulationsplan ω, normalplan η.

Frenets formler grafisk: I hvilken retning “trækkes” det medfølgende koordinatsystem?

Torsion: Beregning

for en generel parameterfremstilling $\mathbf{r}(t)$

1. hastighed: $\mathbf{r}' = v\mathbf{t}$.
2. acceleration: $\mathbf{r}'' = v'\mathbf{t} + v^2\kappa\mathbf{n}$.
3. $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = v^3\kappa(\mathbf{t} \times \mathbf{n}) = v^3\kappa\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{b} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{v^3\kappa}$.
4. $\mathbf{r}'' \cdot \mathbf{b} = 0 \Rightarrow$ (differentiation)
   $\mathbf{r}''' \cdot \mathbf{b} + \mathbf{r}''v\mathbf{b}' = 0 \Rightarrow$ (Frenet)
   $\mathbf{r}''' \cdot \mathbf{b} - \mathbf{r}'' \cdot v\tau\mathbf{n} = 0$.
5. $\mathbf{r}''' \cdot \mathbf{b} = v\tau(\mathbf{r}'' \cdot \mathbf{n}) \overset{(2)}{=} v^3\kappa\tau$.
   Isoler τ!
6. $$\tau \overset{(5)}{=} \frac{\mathbf{r}''' \cdot \mathbf{b}}{v^3\kappa} \overset{(3)}{=} \frac{\mathbf{r}''' \cdot (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')}{v^6\kappa^2} = \frac{\mathbf{r}''' \cdot (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2}.$$
   Til det sidste lighedstegn bruges krumningsformlen $\kappa = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{v^3}$.

Formler for rumkurver 1

$\mathbf{t}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{n}$ – i denne rækkefølge!

Parameterfremstilling $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$.
I punktet P_0 med $\overrightarrow{OP_0} = \mathbf{r}(t_0)$ gælder:

1. $$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'(t_0)}{|\mathbf{r}'(t_0)|} \leftarrow \text{ enhedstangent}$$
2. $$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0)}{|\mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0)|} \leftarrow \text{ binormal}$$
3. $$\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t} \leftarrow \text{ hovednormal}$$

t og **n** udspænder oskulationsplan ω_{P_0}.

Formler for (rum)kurver 2

Krumning og torsion

Parameterfremstilling $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$.
I punktet P_0 med $\overrightarrow{OP_0} = \mathbf{r}(t_0)$ gælder:

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0)|}{|\mathbf{r}'(t_0)|^3} \leftarrow \text{ krumning for rumkurve}$$

$$\kappa = \frac{[\mathbf{r}'(t_0), \mathbf{r}''(t_0)]}{|\mathbf{r}'(t_0)|^3} \leftarrow \text{ krumning for plan kurve}$$

$$\tau = \frac{\mathbf{r}'''(t_0) \cdot (\mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0))}{|\mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0)|^2} \leftarrow \text{ torsion for rumkurve}$$