Geometriske grundbegreber
9. lektion

Martin Raussen

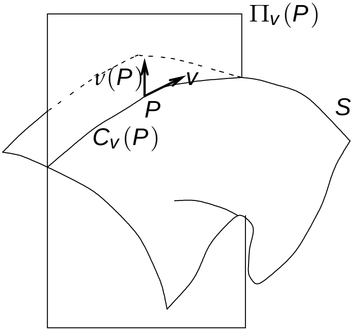
Institut for matematiske fag
Aalborg Universitet

8.4.2008

9A – Normalkrumninger

- Normalsnit
- Normalkrumning
- Normalkrumning og geodætisk krumning for en fladekurve
- 2.fundamentalform til beregning af normalkrumninger

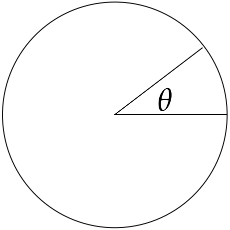
Normalsnit og normalkrumning

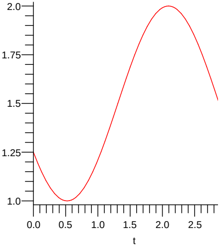


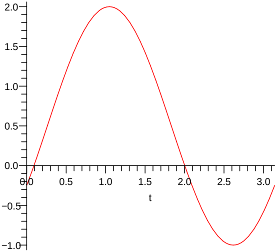
S	flade. $P \in S$ punkt
$\mathbf{v}$	$\in T_P S$: tangentretning
$\nu(P)$	normalvektor til S i P
$\Pi_v(P)$	normalplan i retning $\mathbf{v}$ spændt af ν og $\mathbf{v}$
$C_{\mathbf{v}}(P)$	$= \Pi_v(P) \cap S$: normalsnit i tangentretning $\mathbf{v}$
$k_n(P; \mathbf{v})$	normalkrumning: krumning af normalsnit i normalplan

Normalkrumninger

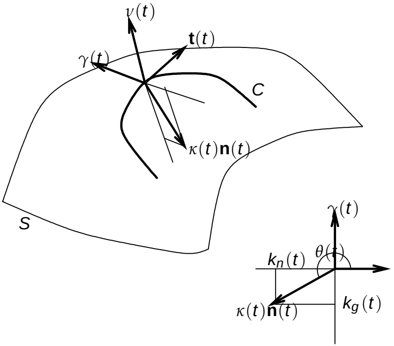
Til hver af de uendelige mange tangentretninger (vinkler) θ i tangentplanen $T_P S$ svarer en normalkrumning $k_n(P;\theta)$.
Hvordan kan man få et overblik over alle disse normalkrumninger?
I hvilken retning er den størst, hhv. mindst?







Geodætisk krumning og normalkrumning



$(\mathbf{t}, \gamma, \nu)$ er et medfølgende koordinatsystem langs med kurven. $\mathbf{t}$ og γ udspænder tangentplanen.

$\mathbf{t}$: kurvens enhedstangentvektor

$\mathbf{n}$: kurvens hovednormalvektor

ν: fladens normalvektor

$\gamma := \nu \times \mathbf{t}$: den indre normal (i tangentplanen)

$\mathbf{n} = (\cos\theta)\nu + (\sin\theta)\gamma$

$\mathbf{t}' = \kappa\mathbf{n} = k_n\nu + k_g\gamma$

$k_n = \mathbf{t}' \cdot \nu = \kappa\cos\theta$ kurvens normalkrumning (skyldes fladen)

$k_g = \mathbf{t}' \cdot \gamma = \kappa\sin\theta$ kurvens geodætiske krumning (i tangentplanen; skyldes kurven)

Beregning af normalkrumning 1

Parameterfremstilling for flade:	$\mathbf{r}(u,v)$
Parameterfremstilling for fladekurve:	$\mathbf{x}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$
Kurvens enhedstangentvektor:	$\mathbf{t}(t)$
Kurvens hovednormalvektor:	$\mathbf{n}(t)$
Fladens normalvektor langs med kurven:	$\nu(t) = \nu(u(t), v(t))$

1. $\frac{d\mathbf{t}(t)}{ds} = \frac{1}{s'(t)} \cdot \frac{d\mathbf{t}(t)}{dt} = \frac{1}{v(t)} \cdot \frac{d\mathbf{t}(t)}{dt}$
2. $\mathbf{t}(t) \cdot \nu(t) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{t}'(t) \cdot \nu(t) + \mathbf{t}(t) \cdot \nu'(t) = \mathbf{0}$
3. $k_n(t) = \frac{1}{v(t)}(\mathbf{t}'(t) \cdot \nu(t)) \overset{(2)}{=} -\frac{1}{v(t)}(\mathbf{t}(t) \cdot \nu'(t))$
   Normalkrumning $k_n(t)$ afhænger kun af tangentretningen $\mathbf{t}(t)$!

Beregning af normalkrumning 2

4.
$$\begin{aligned} \nu' &= \nu_u u' + \nu_v v' & \leftarrow \nu\text{s afledede langs med kurven} \\ \mathbf{t} &= \frac{1}{v}(\mathbf{r}_u u' + \mathbf{r}_v v') & \leftarrow \mathbf{t} \text{ langs med kurven.} \end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned} k_n &\overset{(3)}{=} \frac{1}{v}(-\mathbf{t} \cdot \nu') \\ &= -\frac{1}{v^2}((\mathbf{r}_u \cdot \nu_u)(u')^2 + (\mathbf{r}_u \cdot \nu_v + \mathbf{r}_v \cdot \nu_u)u'v' \\ &\quad + (\mathbf{r}_v \cdot \nu_v)(v')^2). \end{aligned}$$

6. $\nu \cdot \mathbf{r}_u = \nu \cdot \mathbf{r}_v = 0 \Rightarrow \nu_u \cdot \mathbf{r}_u + \nu \cdot \mathbf{r}_{uu} = 0$ osv.

7.
$$\begin{aligned} e &= -\mathbf{r}_u \cdot \nu_u \overset{(6)}{=} \nu \cdot \mathbf{r}_{uu} \\ f &= -\mathbf{r}_v \cdot \nu_u \overset{(6)}{=} \nu \cdot \mathbf{r}_{vu} \\ f &= -\mathbf{r}_u \cdot \nu_v \overset{(6)}{=} \nu \cdot \mathbf{r}_{uv} \\ g &= -\mathbf{r}_v \cdot \nu_v \overset{(6)}{=} \nu \cdot \mathbf{r}_{vv} \end{aligned}$$

Den anden fundamentalform

Normalkrumningen i tangentretningen $\mathbf{t} = a\mathbf{r}_u + b\mathbf{r}_v$:
($a = u', b = v'$)

$$k_n(\mathbf{t}) \overset{(5,7)}{=} \frac{ea^2 + 2fab + gb^2}{v^2} = \frac{ea^2 + 2fab + gb^2}{Ea^2 + 2Fab + Gb^2} = \frac{I\!I(a,b)}{I(a,b)}$$

(E, F, G: Koefficienter i den 1. fundamentalform)
Koefficienterne e, f, g i den 2. fundamentalform $I\!I(a,b)$:

$$e = \mathbf{r}_{uu} \cdot \nu = \frac{\mathbf{r}_{uu} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}; \quad f = \mathbf{r}_{uv} \cdot \nu = \frac{\mathbf{r}_{uv} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

$$g = \mathbf{r}_{vv} \cdot \nu = \frac{\mathbf{r}_{vv} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

9B – Krumninger i fladepunkter

- Hovedkrumninger k_1 og k_2
- Eulers formel
- Gausskrumning K
- Middelkrumning H
- Praktisk beregning af k_1 og k_2

Hovedkrumninger og Eulers formel

Blandt alle normalkrumninger i et punkt $P \in S$ findes der en største og en mindste: de to hovedkrumninger k_1 og k_2.
De tilsvarende tangentretninger $\mathbf{t}_1$ og $\mathbf{t}_2$ kaldes hovedretninger.
Eulers sætning.

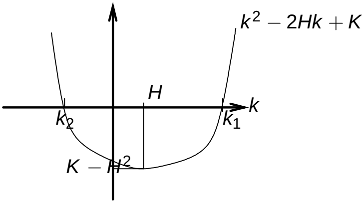
1. $\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2 = 0$: Hovedretningerne ortogonale.
2. Normalkrumning i tangentretning $\mathbf{t}$ med vinkel θ mellem $\mathbf{t}_1$ og $\mathbf{t}$:
$$k_n(\mathbf{t}) = \cos(\theta)^2 k_1 + \sin(\theta)^2 k_2.$$

Hvordan beregnes $k_1, k_2, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$?

Gauss - og middelkrumning

Gauss: $K = \dfrac{eg - f^2}{EG - F^2}$

middel: $H = \dfrac{eG + gE - 2fF}{2(EG - F^2)}$



Hovedkrumninger k_1, k_2 = største/mindste normal-krumning =
rødder i polynomiet
$k^2 - 2Hk + K = 0$
$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}$
$k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$
Alt kan beregnes ved brug af koefficienterne E, F, G, e, f, g af de to fun-damentalformer.
Bemærk:

$$K = k_1 k_2 \qquad H = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

Interpretation?

Eksempel: Vindeflade

$$\mathbf{r}(u,v) = [v\cos u, v\sin u, u]$$
$$\mathbf{r}_u(u,v) = [-v\sin u, v\cos u, 1]; \mathbf{r}_v(u,v) = [\cos u, \sin u, 0]$$
$$E(u,v) = v^2+1, F(u,v) = 0, G(u,v) = 1$$
$$(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)(u,v) = [-\sin u, \cos u, -v]$$
$$|(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)|(u,v) = \sqrt{1+v^2} = \sqrt{EG-F^2}$$
$$\nu(u,v) = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} = [-\sin u, \cos u, -v]$$
$$\mathbf{r}_{uu}(u,v) = [-v\cos u, -v\sin u, 0]$$
$$\mathbf{r}_{uv}(u,v) = [-\sin u, \cos u, 0]; \mathbf{r}_{vv}(u,v) = \mathbf{0}$$
$$e(u,v) = 0, f(u,v) = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}, g(u,v) = 0$$
$$K(u,v) = \frac{-1}{(1+v^2)^2}, H(u,v) = 0$$
$$k_1 = \frac{1}{1+v^2}, k_2 = \frac{-1}{1+v^2}$$

Hovedretninger: $\mathbf{t}_1 = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}\mathbf{r}_u + \mathbf{r}_v$; $\mathbf{t}_2 = \frac{-1}{\sqrt{1+v^2}}\mathbf{r}_u + \mathbf{r}_v$