

Geometriske grundbegreber

10. lektion

Martin Raussen

Institut for matematiske fag
Aalborg Universitet

15.4.2008

10A – Krumningsbegreber på flader

især:

- ▶ Hovedkrumninger k_1 og k_2
- ▶ Gausskrumning K og middelkrumning H
- ▶ Praktisk beregning af k_1 og k_2
- ▶ Eulers formel
- ▶ Klassifikation af punkter
(elliptisk, hyperbolsk, parabolisk)

Normal- og hovedkrumninger

Normalkrumningen $k = k_n(a, b)$ i tangentreningen $\mathbf{t} = ar_u + br_v$ beregnes som

$$k = \frac{ea^2 + 2fab + gb^2}{Ea^2 + 2Fab + Gb^2}. \quad (1)$$

Hvilke værdier kan k antage for varierende tangentreninger \mathbf{t} ?

(1) \Leftrightarrow

$$((kE - e)a + (kF - f)b)^2 + ((kG - g)(kE - e) - (kF - f)^2)b^2 = 0 \text{ har løsning } k \Leftrightarrow$$

$$(kG - g)(kE - e) - (kF - f)^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

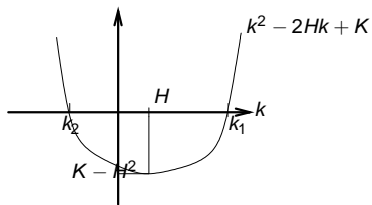
$$k^2 - \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2}k + \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \leq 0$$

$$k^2 - 2Hk + K \leq 0$$

Gauss - og middelkrumning

$$\text{Gauss: } K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

$$\text{middel: } H = \frac{eG + gE - 2fF}{2(EG - F^2)}$$



Hovedkrumninger $k_1, k_2 =$
største/mindste normal-
krumning =

rødder i polynomiet

$$k^2 - 2Hk + K = 0$$

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}$$

$$k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$$

Bemærk:

$$K = k_1 k_2 \quad H = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

Klassifikation af punkter

Et punkt P på en flade S kaldes

elliptisk hvis $K(P) > 0$.

$k_1(P), k_2(P)$ har **samme** fortegn; alle normalsnit krummer i sammen retning af normalen; $T_P(S)$ ligger på **én** side af fladen tæt på S .

hyperbolsk hvis $K(P) < 0$.

$k_1(P), k_2(P)$ har **forskelligt** fortegn; der findes en (asymptotisk) retning med normalkrumning 0; $T_P(S)$ **skærer** fladen i en kurve tæt på S .

parabolsk hvis $K(P) = 0$ og ikke både $k_1(P) = k_2(P) = 0$.

Normalkrumninger mellem 0 og en maksimal (eller minimal) hovedkrumning. Alle normalsnit (undtagen evt. en) på **samme** side af tangentplan $T_P(S)$.

planpunkt hvis $K(P) = k_1(P) = k_2(P) = 0$. Alle

normalkrumninger er 0. Fladen **krummer næsten**

Hovedretninger og Eulers formel

Hovedretninger:

$$\mathbf{t}_i = a_i \mathbf{r}_u + b_i \mathbf{r}_v, \quad i=1,2.$$

Løs en af ligningerne

$$\begin{aligned} \blacktriangleright & (k_i E - e) a_i + \\ & (k_i F - f) b_i = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright & (k_i F - f) a_i + \\ & (k_i G - g) b_i = 0 \end{aligned}$$

for de beregnede hovedkrumniger k_1, k_2

Der er en hel "linie" bestående af løsninger!

En løsning $[a_i, b_i]$ indsættes

$$\text{i} \quad \mathbf{t}_i = a_i \mathbf{r}_u + b_i \mathbf{r}_v.$$

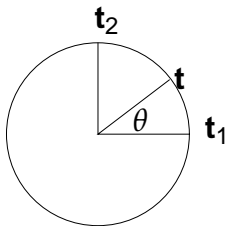
Eulers formel:

beregner **alle** normalkrumniger ud fra hovedkrumnigerne k_1, k_2 .

Hovedretninger: $\mathbf{t}_1 \perp \mathbf{t}_2$.

For tangentvektor \mathbf{t}_θ med vinkel θ fra \mathbf{t}_1 til \mathbf{t}_θ :

$$k_n(\mathbf{t}_\theta) = (\cos \theta)^2 k_1 + (\sin \theta)^2 k_2.$$



10B – Specielle flader

- ▶ Grafen af en funktion
- ▶ Omdrejningsflader
- ▶ Linierede (retlinede) flader

Grafen af en funktion

$z = f(x, y) \rightsquigarrow$ parameterfremstilling $\mathbf{r}(u, v) = [u, v, f(u, v)]$.

$$\mathbf{r}_u(u, v) = [1, 0, f_u(u, v)],$$

$$\mathbf{r}_v(u, v) = [0, 1, f_v(u, v)],$$

$$E(u, v) = 1 + (f_u(u, v))^2;$$

$$F(u, v) = f_u(u, v)f_v(u, v);$$

$$G(u, v) = 1 + (f_v(u, v))^2.$$

Normalvektor $\mathbf{v}(u, v) = \frac{[-f_u(u, v), -f_v(u, v), 1]}{\sqrt{1+(f_u(u, v))^2+(f_v(u, v))^2}},$

$$\mathbf{r}_{uu}(u, v) = [0, 0, f_{uu}(u, v)]; \quad \mathbf{r}_{uv}(u, v) = [0, 0, f_{uv}(u, v)];$$

$$\mathbf{r}_{vv}(u, v) = [0, 0, f_{vv}(u, v)];$$

$$\mathbf{e}(u, v) = \frac{f_{uu}(u, v)}{\sqrt{1+(f_u(u, v))^2+(f_v(u, v))^2}};$$

$$f(u, v) = \frac{f_{uv}(u, v)}{\sqrt{-}}; \quad g(u, v) = \frac{f_{vv}(u, v)}{\sqrt{-}}.$$

Gausskrumning $K(u, v) = \frac{(f_{uu}f_{vv} - (f_{uv})^2)(u, v)}{(1+f_u^2+f_v^2)^2(u, v)};$

Middelkrumning $H(u, v) = \frac{((1+f_u^2)f_{vv} - 2f_u f_v f_{uv} + (1+f_v^2)f_{uu})(u, v)}{2(1+f_u^2+f_v^2)^{\frac{3}{2}}(u, v)}.$

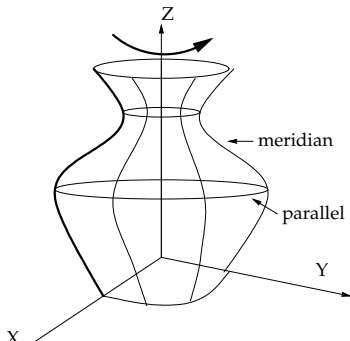
Omdrejningsflader 1

Frembringerkurve – rotationssymmetri

Frembringerkurve

med parameterfremstilling $\mathbf{x}(v) = [x(v), 0, z(v)]$, $x(v) > 0$

drejes om Z -aksen.



Omdrejningsflade med parameterfremstilling

$\mathbf{r}(u, v) = [x(v) \cos u, x(v) \sin u, z(v)]$

Parameterkurver:

Parallelcirkler – vandret

Meridianer – frembringer roteret

Omdrejningsflader 2

Fundamentalformer og krumninger

$$I. E(u, v) = x(v)^2, F(u, v) = 0, G(u, v) = x'(v)^2 + z'(v)^2.$$

Meridian \perp parallelcirkel

$$II. e(u, v) = \frac{-xz'}{\sqrt{x'(v)^2 + z'(v)^2}}, f(u, v) = 0,$$

$$g(u, v) = \frac{x''(v)z'(v) - x'(v)z''(v)}{\sqrt{x'(v)^2 + z'(v)^2}}.$$

$$f = F = 0 \Rightarrow$$

hovedkrumningsretninger = parameterkurvernes
tangentretninger.

$$\{k_1, k_2\} = \left\{ \frac{e}{E}, \frac{g}{G} \right\} = \left\{ -\frac{z'}{x\sqrt{x'^2 + z'^2}}, \frac{x''z' - x'z''}{\sqrt{x'^2 + z'^2}^3} \right\}$$

$$K = \frac{eg}{EG}, H = \frac{eG + gE}{2EG}.$$

Hvis frembringerkurven er parametriseret ved buelængde:

$$K = \frac{-x''}{x}, \{k_1, k_2\} = \left\{ \frac{-z'}{x}, \frac{x''}{z'} \right\}.$$

Fortegnet for x'' afgør om punktet er hyperbolsk, elliptisk,
parabolsk.

Linierede flader (ruled surfaces)

sammensat af **rette linier**, kan alligevel være krumme.

Parameterfremstilling: $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{p}(u) + v\mathbf{q}(u)$, $u, v \in \mathbf{R}$

$\mathbf{p}(u)$: centalkurve

$\mathbf{q}(u)$: retningsvektor for linie gennem P_u med $\overrightarrow{OP_u} = \mathbf{p}(u)$.

Eksempler:

- ▶ Kegleflade $\mathbf{p}(u)$ konstant
- ▶ Cylinderflade $\mathbf{q}(u)$ konstant
- ▶ Tangentflade $\mathbf{q}(u) = \mathbf{p}'(u)$
- ▶ Hyperbolsk paraboloid $\mathbf{p}(u) = [u, 0, 0]$, $\mathbf{q}(u) = [0, 1, cu]$

Gausskrumning $K(P) \leq 0$ i alle punkter P .

Hvorfor? Langs linie gennem P er normalkrumningen 0.

Eulers formel: k_1, k_2 kan ikke have samme fortegn:

$$K = k_1 k_2 \leq 0.$$

Udfoldelige flader: $K=0$, kan bukkes ud af plane områder.