

E-opgave 1

I opgaven arbejder vi med de bygninger som Sidneys opera, tegnet af Jørgen Utzon, er sammensat af. Halvdelen af en bygningsdel B (fra gulv til loft) er skåret ud af en kugle med en given radius R ; centrum lægger vi for nemhedens skyld i Origo. Nu afskærer man B ved hjælp af tre planer: XZ -planen, YZ -planen og en skråplan α som antages at være givet ved ligningen $x + y + z = S$ med $0 < S < R$; den går gennem punktet $(0, 0, S)$ på Z -aksen. Se Figur 1 på side 2.

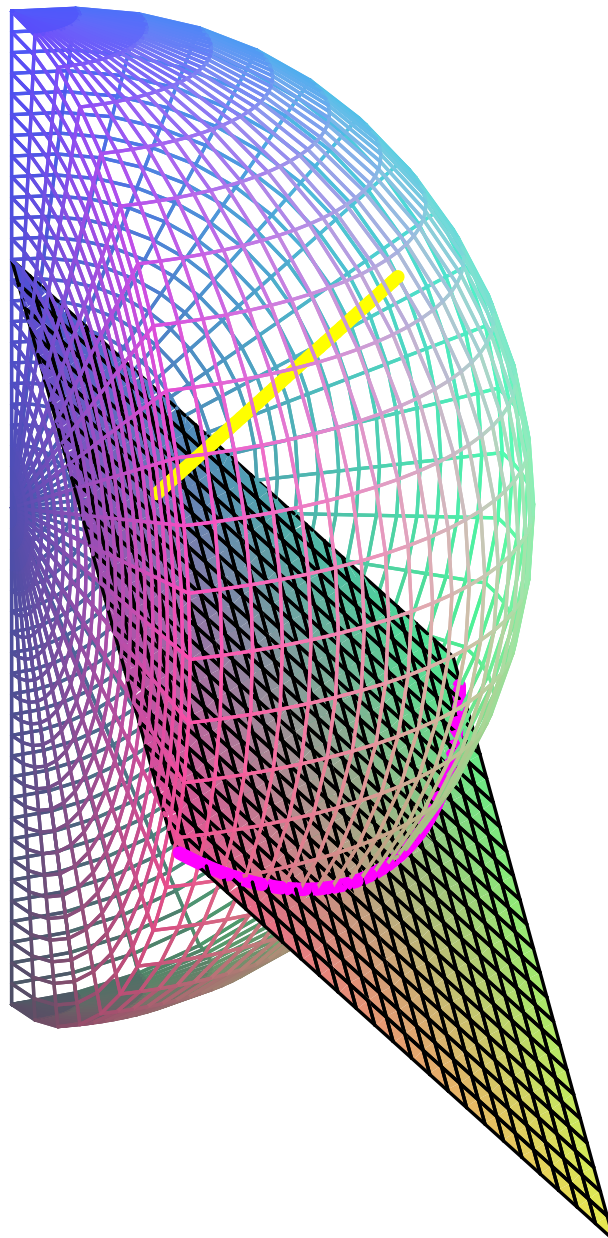
1. Givet et punkt (x, y, z) i rummet. Angiv fire uligheder som punktets koordinater skal opfylde hvis punktet ligger inden for bygningen B . Hvordan karakteriseres koordinater svarende til punkter på B s rand (tag, gulv, vægge)?
2. Vis at gulvet i B er indeholdt i en cirkelskive C i skråplanen α med centrum i $(\frac{S}{3}, \frac{S}{3}, \frac{S}{3})$ og bestem cirkelens radius. Gør rede for at gulvet afgrænses af to linier gennem punktet $(0, 0, S)$ som skærer hinanden med en vinkel på $\frac{\pi}{3}$.
3. Gør rede for at cirkelskiven C skærer breddecirklen givet ved $\varphi = \varphi_0$ i sfæriske koordinater på kuglen med radius R hvis og kun hvis

$$R(\cos \varphi_0 + \sin \varphi_0) \leq S \leq R(\cos \varphi_0 + \sqrt{2} \sin \varphi_0).$$

Gør rede for at der et netop et snitpunkt på denne breddecirkel når $S = R(\cos \varphi_0 + \sqrt{2} \sin \varphi_0)$ og to ellers. For snitpunktet med breddekoordinat $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ ønskes en beregning af denne koordinat θ som funktion af længdekoordinaten φ .¹
Bemærk: Cirklen C er altså *ikke* en breddecirkel.

4. Bestem tangentplan og normal til kuglefladen med radius R i et punkt (x, y, z) på denne kugleflade. I hvilket punkt P_t på taget er tangentplanen parallel med gulvplanen? I hvilket punkt P_g skærer normalen i P_t gulvet?

¹Formlen $\cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4})$ kan hjælpe



Figur 1: Bygningsdel B og snitcirkel