NIKOLAJ HESS-NIELSEN
MARTIN RAUSSEN

E-opgave 4

Når en bygning udsættes for en momentan belastning så begynder den som regel at svinge og svaje. Vi måler et punkts bevægelse (afvigelse fra positionen i ro) som en funktion $x(t)$ af tiden. Den vil som regel følge en dæmpet harmonisk svingning som man kan beskrive med en differentialligning af anden orden $x'' + bx' + cx = 0$. Hvis $b = 0$ er der tale om en udæmpet svingning, for $b > 0$ dæmpes udledningens effekt med tiden.

I opgaven undersøges de resulterende svingninger matematisk; i dens sidste del illustreres fænomenet *resonans*, som kan optræde når bygningen udsættes for en periodisk kraft – somme tider med generende eller endda katastrofale konsekvenser.

For ethvert tal $0 \leq b < 10$ beskriver den homogene differentialligning

$$x'' + bx' + 25x = 0 \qquad (H)$$

en harmonisk svingning; den er udæmpet hvis $b = 0$ og dæmpet ellers.

1. Bestem løsningsmængderne L_H til differentialligningen (H) først i tilfældet $b = 6$ (dæmpet) og derefter i tilfældet $b = 0$ (udæmpet).

I resten af opgaven sætter vi dæmpningsfaktoren $b = 0$. Systemet (bygningen) påføres nu en periodisk kraft med frekvens ω_0. Den resulterende bevægelse beskrives ved den inhomogene differentialligning

$$x'' + 25x = \cos \omega_0 t. \qquad (I)$$

2. Bestem løsningsmængden L_I for differentialligningen (I) når $\omega_0 = 4$. Gør rede for, at enhver løsning er periodisk med periode 2π.

3. Bestem blandt løsningerne i L_I den som tilfredsstiller begyndelsesbetingelserne $x(0) = 0$ og $x'(0) = 1$.

4. Bestem et reelt tal C således at funktionen $x(t) = Ct \sin 5t$ løser differentialligningen (I) når $\omega_0 = 5$. Beskriv denne og de øvrige løsningers opførsel for store værdier t.