NIKOLAJ HESS-NIELSEN
MARTIN RAUSSEN

2. lektion

Mandag, den 10.9. 2007, kl. 8:15 – 12:00.
Denne gang afviger strukturen stadigvæk fra standardforløbet.

Repetition og Perspektivering:

Hold 1: Auditorium 1. Hold 2: A314.
kl. 8:15 – 8:40.
Trigonometriske funktioner og deres inverse.

Forelæsning (1. del)

Hold 1: Auditorium 1. Hold 2: A314.
kl. 8:50 – 9:25.

Mål og indhold:

På ungdomsuddannelserne har I lært, at man kan approksimere en differentiabel funktion f tæt på et punkt a i definitionsmængden ved den funktion, som overfører x i $f(a) + f'(a)(x - a)$. Det er denne funktion der beskriver tangentlinien gennem punktet $(a, f(a))$ i koordinatplanen. Desværre er en *lineær* approksimation ofte ikke god nok, når man fjerner sig fra a.

For at finde funktioner, der er bedre til at approksimere f, undersøger vi *polynomier* "udviklet i" a på formen $P_n(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \cdots + c_n(x - a)^n$. Værdier af polynomier er nemme at beregne for mennesker og endnu nemmere for lommeregnere eller computere! Vi ønsker, at ikke blot funktionsværdien af $f(x)$ og $P_n(x)$ og deres hældninger men også højere ordens afledede op til orden n stemmer overens i a: $P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$. Hvis man differentierer polynomiet $P_n(x)$ en eller flere gange og indsætter værdien a, så finder man formlen: $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$.[1]

Benytter man denne formel for en funktion f, som er n gange differentiabel i a, så når man frem til n-te ordens Taylor-approksimationen til f i $x = a$ givet ved: $P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$; dette polynomiums graf approksimerer funktionens graf som regel langt bedre end tangentlinien.

[1] $k! = 1 \cdot 2 \cdots k$.

Litteratur:

Edwards & Penney, Sect. 10.4, pp. 743 – 747.

Opgaveregning:

kl. 9:30 – 11:20 i grupperummene.

Opgaver:

E&P, 6.8, pp. 497 – 498 Værdier af inverse trigonometriske funktioner

- 1, 2, 3.

Differentiationstræning

- 9, 17, 23.

Integraler ved hjælp af inverse trigonometriske funktioner

- 31, 37.

E&P, 10.4, p. 755 Taylorpolynomier (restled gemmes til senere!)

- 3, 8, 11.

E&P, 10.4, p. 754 True/False opgaver

- 2 – 4.

Forelæsning (2. del)

Hold 1: Auditorium 1. Hold 2: A314.
kl. 11:25 – 12:00.

Mål og indhold:

Hvor stor er fejlen, når man har approksimeret funktionen f ved dens n-te Taylorapproksimation i a; hvad kan man sige om differensen (*restleddet*) $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$? Hvis ikke man kan beregne $f(x)$ eksakt, så kan man heller ikke beregne restleddet præcist, men man kan vurdere dens størrelse – hvis bare funktionen er $(n+1)$ gange differentiabelt:

Man kan bevise (det gør vi ikke):
Hvis f er $(n+1)$-gange differentiabelt på et åbent interval som indeholder punkterne a og x, så findes der et tal z mellem a og x, således at restleddet har formen
$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$.

Bemærk, at restleddet ligner leddene i Taylor-approksimationen; men man skal indsætte et (ukendt) tal z på as plads i den $(n+1)$-gange afledede funktion i tælleren! I praksis betyder det, at man forsøger at finde den *største* værdi af funktionen $|f^{(n+1)}(z)||x-a|^{n+1}$, hvor z ligger i intervallet mellem a og x – eller i det mindste en grænse for hvor stor denne "fejl" højst kan blive.

Det er sådan lommeregnere og computere faktisk kan beregne værdier af mange funktioner med en given nøjagtighed: Man skal kende værdier af (mange!) afledede i visse punkter (svarende til a) for at kunne beregne Taylorapproksimationer af en høj grad. Hvor høj graden skal være, fortæller restleddet. Ønsker man at de første 10 cifre efter kommaet er præcise, er det en god ide at vælge n så stor, så man er sikker på at $R_n(x) < 10^{-11}$...

Litteratur:

Edwards & Penney, Sect. 10.4, pp. 747 – 749.

Næste gang:

Torsdag, den 13.9., kl. 12:30 – 16:15
Vektorfunktioner, kurver, hastighed og acceleration (E& P, 11.5).