9. lektion

Hold 1: Torsdag, den 11.10.2007, kl. 12:30 – 16:15
Hold 2: Tirsdag, den 9.10.2007, kl. 8:15 – 12:00.

Repetition og Perspektivering:

Hold 1: Auditorium 1, kl. 8:15 – 8:40. Hold 2: A314, kl. 12:30 – 12:55
Polære, cylindriske og sfæriske koordinater

Opgaveregning:

Hold 1: kl. 13:00 – 14:50 i grupperummene. Hold 2: kl. 8:45 – 10:35 i grupperummene

Opgaver:

E&P, 9.2, pp. 671 – 674 Polære koordinater

- 9,11,13,21.

Grafer og skæringspunkter mellem kurver

- 41,55[1].

E&P, 11.8, pp. 893 – 894 Cylindriske og sfæriske koordinater

- 1,11,19,39.

Grafer

- 29,35.

E&P, p. 670 True/false 1 – 10.

E&P, pp. 892 – 893 True/false 1 – 10

Forelæsning

Hold 1: Auditorium 1, kl. 14:55 – 16:15. Hold 2: A314, kl. 10:40 – 12:00.

Mål og indhold:

(Partielle) afledede kan bruges til at approksimere funktionsværdier der hvor de er vanskelige/umulige at udregne præcist:
For en funktion f af en variabel x kan man bruge tangentlinien gennem et punkt $(a, f(a))$ eller – hvad det er det samme – dets 1ste ordens Taylorpolynomium, givet ved $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ til at finde y som approksimation til $f(x)$:

$$\Delta f = f(x) - f(a) \approx f'(a)(x-a) = f'(a)\Delta x = df.$$

[1] Udtryk $\cos 2\theta$ ved hjælp af $\sin\theta$

Her står Δf får den faktiske tilvækst i funktionsværdien, mens df står for den differentielle, som approksimerer den, når x er tæt på a. Kender man altså $f(a)$ og $f'(a)$, så kan man på denne måde beregne en (lineær) tilnærmelse til $f(x)$.

For en funktion f af to variable sammenholder man tilsvarende den eksakte værdi $f(x,y)$ med den z-værdi man får i tangentplanen gennem punktet (a,b). Denne tangentplan er givet ved ligningen $z = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + f(a,b)$; også dette udtryk kan tolkes som funktionens 1ste ordens Taylorpolynomium i 2 variable. Lige som ovenfor approksimeres $f(x,y)$:

$$\Delta f = f(x,y) - f(a,b) \approx f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) = f_x(a,b)\Delta x + f_y(a,b)\Delta y = df.$$

En funktion af to variable kaldes differentiabel i punktet (a,b), hvis denne lineære approksimation er "god" i alle punkter i en cirkelskive (eller rektangel) omkring (a,b). Ved hjælp af en grænseværdi kan man formulere præcist hvornår approskimationen er god nok. Man forlanger, at

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta f - df}{|(h,k)|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(f(a+h,b+k) - f(a,b)) - (f_x(a,b)h + f_y(a,b)k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Interpretation: Approksimationsfejlen $\Delta f - df$ går meget hurtigere mod 0 end afstanden mellem punkterne (x,y) og (a,b) – for alle punkter tæt nok på (a,b). Definitionen kan generaliseres til højere dimensioner vha. gradientvektoren, se formel (18) i lærebogen.

Det kan være ret vanskeligt at bruge denne definition til at checke om en given funktion faktisk er differentiabel. Heldigvis er mange gængse funktioner differentiable "per automatik": Hvis de partielle afledede f_x og f_y af fuktionen f er kontinuerte i en cirkelskive eller rektangel, så er funktionen f differentiabel i alle punkter af cirkelskivens (eller rektanglets) indre – og dermed tillades en god lineær approksimation. Men det er altså som regel ikke nok, at de partielle afledede bare eksisterer.

Sammenhængen mellem begreberne fremgår af den følgende oversigt. For en funktion f af flere variabel gælder:

1. f kontinuert differentiabel (alle 1ste ordens afledede eksisterer og er kontinuerte) $\Rightarrow f$ differentiabel.
2. f differentiabel $\Rightarrow f$ har partielle afledede (de er ikke altid kontinuerte).
3. f differentiabel $\Rightarrow f$ kontinuert.

Litteratur:

Edwards & Penney, E& P, section 12.6, pp. 942 – 949.

Næste gang:

Torsdag, den 18.10., kl. 12:30 – 16:15.
E-opgave 1 og 2. Udgangspunkt: Jørgen Utzons opera i Sydney.