MAT1 – A&D

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

Efterår 2007

"Prædiken"

- Præsentation
- Mål med forelæsningen
  – konkret – abstrakt
  – forhold til semester og studium
- Hvordan ser en kursusgang ud?
- Midler
  Forelæsning, opgaver, selvlæsning
  Kursusplan, hjemmeside
  Litteratur
  Eksamen
- Forudsætninger og forventninger
- "Ingeniørmatematik"
- Software: MAPLE, VIDIGEO

Trigonometriske funktioner

Nyttige formler

Additionsformler
- $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
- $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

Dobbelte vinkler
- $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$
- $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$

Halve vinkler
- $\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)}$
- $\sin\theta = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)}$

Differentiation
- $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$
- $g(x) = \cos x \Rightarrow g'(x) = -\sin x$

Omvendte trigonometriske funktioner

Definitioner

- $\sin^{-1} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,
  $\sin^{-1} y = x \Leftrightarrow \sin x = y$
- $\cos^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$,
  $\cos^{-1} y = x \Leftrightarrow \cos x = y$
- $\tan^{-1} : \mathbf{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,
  $\tan^{-1} y = x \Leftrightarrow \tan x = y$

Differentiation

- $f(x) = \sin^{-1}(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $g(x) = \cos^{-1}(x) \Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $h(x) = \tan^{-1}(x) \Rightarrow h'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Taylorpolynomier

Givet en funktion f, som er n gange differentiabel i a.
Polynomiet $P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ har følgende egenskaber:

1. $P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), 0 \leq k \leq n$: de samme afledede i a som den oprindelige funktion f;
2. P_n er tæt på a det bedst approksimerende polynomium af en grad som er højst n.

Hvis f er $n+1$ gange differentiabel:
Restleddet ("fejlen") $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ er på formen
$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ for et (ukendt) tal z mellem a og x.
Anvendelse: Hvis man har brug for at $|R_n(x)| < \varepsilon$ på et interval $[a-\delta, a+\delta]$, så skal man sikre at

Vektorfunktioner

Vektorfunktion $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ beskriver kurve vha. $\overrightarrow{OP_t} = \mathbf{r}(t)$.

Differentiation: $\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = (x'(t), y'(t), z'(t))$ koordinatvis.

Betydning: Hastighedsvektor $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$; længde $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$ svarer til farten i P_t.

Accelerationsvektoren $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$; længde = skalar acceleration $a(t) = |\mathbf{a}(t)| \neq v'(t)$!

Integration: $\int_a^b \mathbf{r}(t)dt = (\int_a^b x(t)dt, \int_a^b y(t)dt, \int_a^b z(t)dt)$ koordinatvis.

Anvendelse: Bestemmelse af parameterfremstilling $\mathbf{r}(t)$ med udgangspunkt i

- vandrende hastighedsvektor og begyndelsesposition, hhv.

Differentiationsregler

$\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)$ differentiable vektorfunktioner, $h(t)$ en (almindelig) funktion

1. $(\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t))' = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$;
2. $(h(t)\mathbf{u}(t))' = h'(t)\mathbf{u}(t) + h(t)\mathbf{u}'(t)$;
3. $(\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t))' = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$;
4. $(\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t))' = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$.

Krumning - plane kurver; definition

- $\mathbf{T}(s) = (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s))$ – den vandrende enhedstangentvektor; retning givet ved vinklen $\varphi(s)$ i forhold til X-aksen.
- $\mathbf{N}(s) = \hat{\mathbf{T}}(s) = (-\sin\varphi(s), \cos\varphi(s))$ – den vandrende enhedsnormalvektor.
- $\mathbf{T}'(s)$ måler vinkelhastigheden $\varphi'(s)$ og er vinkelret på $\mathbf{T}(s)$:
  - $\mathbf{T}'(s) = \varphi'(s)(-\sin\varphi(s), \cos\varphi(s)) = \varphi'(s)\mathbf{N}(s)$
- Definition: Krumning $\kappa(s) = \varphi'(s)$ i $\mathbf{r}(s)$: $\mathbf{T}'(s) = \kappa(s)\mathbf{N}(s)$

Krumning - plane kurver; beregning

- $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = v(t)\mathbf{T}(t)$
- $\mathbf{T}'(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{T}(t) = \frac{d}{ds}\mathbf{T}(t) \cdot \frac{ds}{dt} = \kappa(t)v(t)\mathbf{N}(t)$
- $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = v'(t)\mathbf{T}(t) + v(t)\mathbf{T}'(t) = v'(t)\mathbf{T}(t) + \kappa(t)v^2(t)\mathbf{N}(t)$ – tangential og normal komponent af accelerationsvektoren
- Projektionen på normalvektoren ved prikprodukt med $\mathbf{N}(t)$: $\kappa(t)v^2(t) = \mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{N}(t) = \mathbf{a}(t) \cdot \frac{1}{v(t)}\hat{\mathbf{r}}'(t)$
- $\kappa(t) = \frac{1}{v^3(t)}\mathbf{r}''(t) \cdot \hat{\mathbf{r}}'(t) = \frac{1}{(x'(t)+y'(t))^{\frac{3}{2}}}(x''(t), y''(t)) \cdot (-y'(t), x'(t)) = \frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{(x'(t)+y'(t))^{\frac{3}{2}}}$

Grænseværdiregler

Hvis $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ og $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = M$, så gælder:

- $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) + g(x,y) = L + M$;
- $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)g(x,y) = LM$;
- $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M}$ såfremt $M \neq 0$.

Konsekvenser

- Summer, differenser og kvotienter af kontinuerte funktioner er kontinuerte (for kvotienter: nævner $\neq 0$!)
- Polynomier i flere variable er kontinuerte
- Rationale funktioner (kvotienter af polynomier) er kontinuerte (undtagen i poler: nævner $= 0$)

Partielle afledede

Definition $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = f_x(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = f_y(a,b) = \lim_{k\to 0} \frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}$

Betydning $f_x(a,b)$ angiver hældningen af (tangenten til) x-kurven over $y = b$ – y holdes konstant!

$f_y(a,b)$ angiver hældningen af (tangenten til) y-kurven over $x = a$ – x holdes konstant!

Højere ordens partielle afledede: $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ osv.

Hvis funktionerne er kontinuerte, så gælder: $f_{xy} = f_{yx}$.

Tangentplan og normal

Tangentplan til fladen givet ved $z = f(x, y)$ i $(a, b, f(a, b))$:

Ligning: $z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$.

Normal: $\mathbf{n}(a, b) = (f_x(a, b), f_y(a, b), -1)$ - eller et multiplum!

Kritiske punkter

Definition

$f : D \to \mathbf{R}$ partielt differentiabel, $D \subseteq \mathbf{R}^2$. Et punkt (a, b) i Ds indre kaldes kritisk, hvis $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$.

Betydning: Grafen for f har i punktet (a, b) en horizontal tangentplan. Derfor har funktionen f muligvis et lokalt extremum i punktet. Men der kan også være tale om et sadelpunkt eller lignende.

Metode: For at finde fs kritiske punkter skal man løse ligningssystemet bestående af de to ligninger

$$f_x(a, b) = 0 \qquad \text{og} \qquad f_y(a, b) = 0.$$

Optimering

Opgave: Find globale extrema (maxima, minima) for en partielt diferentiabel funktion $f : D \to \mathbf{R},\ D \subseteq \mathbf{R}^2$.

Metode: (når D er et lukket og begrænset område i $\mathbf{R}^2$):

1. Find fs kritiske punkter i det indre af D: hvor de partielle afledede er 0.
2. Find punkter på Ds rand, hvor f har lokale extrema på randen.
3. Indsæt de fundne punkters koordinater og sammenlign værdierne. Hvilke(n) er størst/mindst?

Polære koordinater

(r, θ) – radius og argument(vinkel) – bestemmer punkter i planen.
Omregning polær $\mapsto XY$:
$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$.
Omregning $XY \mapsto$ polær:
$r = \sqrt{x^2+y^2}, (\cos\theta, \sin\theta) = (\frac{x}{r}, \frac{y}{r}), r \neq 0$.
Vinkelbestemmelse: inverse trigonometriske funktioner. Check kvadranten!

Cylindriske og sfæriske koordinater

Cylindriske koordinater (r, θ, z): polære koordinater i hver vandret plan.
Sfæriske koordinater: (ρ, φ, θ): radius, breddevinkel $0 \leq \varphi \leq \pi$, længdevinkel $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
Omregning sfærisk $\mapsto XYZ$:
$x = \rho \sin \varphi \cos \theta, y = \rho \sin \varphi \sin \theta, z = \rho \cos \varphi$.
Omregning $XYZ \mapsto$ sfærisk:
$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi = \cos^{-1}(\frac{z}{\rho}), (\rho \neq 0)$,
$r = \sqrt{x^2 + y^2}, (\cos \theta, \sin \theta) = (\frac{x}{r}, \frac{y}{r}), r \neq 0$.

Lineær approksimatrion

En lineær funktion $z = A(x-a) + B(y-b) + C$ beskriver en plan gennem $P:(a,b,C)$.
Hvilket punkt i planen ligger over $(a+\Delta x, b+\Delta y)$?
$z = A(a+\Delta x - a) + B(b+\Delta y - b) + C) =$
$(A\Delta x + B\Delta y) + C = dz + C$.
z vokser med dz når x vokser med Δx og y vokser med Δy.
Funktionen $z = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + f(a,b)$ beskriver tangentplanen til grafen for f i $P:(a,b,f(a,b))$.
Dermed ligger punktet $(a+\Delta x, b+\Delta y, f(a,b)+dz)$ over $(a+\Delta x, b+\Delta y)$ med $dz = f_x(a,b)\Delta x + f_y(a,b)\Delta y$.
z vokser på tangentplanen med dz når x vokser med Δx og y vokser med Δy.

Differentiabilitet

Er den approksimerede værdi $z = f(a,b) + dz$ tæt nok på den rigtige værdi $z = f(a+\Delta x, b+\Delta y) = f(a,b) + \Delta f$ – med $\Delta f = f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b)$?
Ja, hvis differensen $f(a+\Delta x, b+\Delta y) - (f(a,b) + dz)$ er meget mindre end længden af vektoren $(\Delta x, \Delta y)$.

Definition

Funktionen f er differentiabel i punktet (a,b) (i det indre af definitionsområdet), hvis

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b) - (f_x(a,b)\Delta x + f_y(a,b)\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0.$$

Kriterier for differentiabilitet

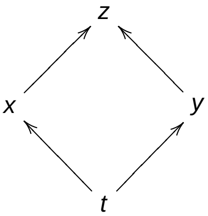
Theorem

1. *Hvis f har kontinuerte partielle afledede så er f differentiabel.*
2. *Hvis f er differentiabel så eksisterer de partielle afledede.*
3. *Hvis f er differentiabel så er f kontinuert.*

De omvendte påstande er forkerte.

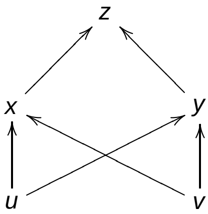
Kæderegel

Differentiation af sammensatte funktioner



$$z(t) = f(x(t), y(t))$$

$$z'(t_0) = f_x(x(t_0), y(t_0))x'(t_0) + f_y(x(t_0), y(t_0))y'(t_0)$$



$$z(u,v) = F(x(u,v), y(u,v))$$

$$z_u(u_0,v_0) = z_x(x(u_0,v_0))x_u(u_0,v_0) + z_y(x(u_0,v_0))y_u(u_0,v_0)$$

$$z_v(u_0,v_0) = \ldots +$$

Implicit differentiation

Tangenter til implicit givne kurver og flader

Givet: Implicit given kurve C ved ligning $F(x,y) = 0$ samt punkt (x_0, y_0) på kurven

Ønskes: Hældning af tangenten gennem (x_0, y_0).

Løsning: $y'(x_0) = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}$

Givet: Implicit given flade S ved ligning $F(x,y,z) = 0$ samt punkt (x_0, y_0, z_0) på kurven

Ønskes: Hældning af tangenter til $x - kurve$ og y-kurve gennem (x_0, y_0, z_0).

Løsning:

$$z_x(x_0, y_0, z_0) = -\frac{F_x(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

$$z_y(x_0, y_0, z_0) = -\frac{F_y(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

Gradient og retningsafledede

$\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y))$;
$\nabla g(x,y,z) = (g_x(x,y,z), g_y(x,y,z), g_z(x,y,z))$.
Gradientvektor, gradientfelt
$D_{\mathbf{u}} f(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f((a,b)+h\mathbf{u})-f(a,b)}{h}$:
Den retningsafledede af f i retning $\mathbf{u} \leftarrow$ enhedsvektor.
Hældning af kurve over linie med parameterfremstilling $(a,b)+h\mathbf{u}$ i punktet $(a,b,f(a,b))$.
Beregning af retningsafledede vha. gradientvektoren:

$$D_{\mathbf{u}} f(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot \mathbf{u}$$

Interpretation: Gradientvektor $\nabla f(a,b)$ har

- retning med størst retningsafledede i $P:(a,b,f(a,b))$.
- størrelse $|\nabla f(a,b)|$ = den største retningsafledede i P.

Gradient og implicit givne flader

En flade S er implicit given ved ligningen $F(x,y,z)=0$, dvs. den består af alle løsninger til denne ligning. $(a,b,c)\in S \Leftrightarrow F(a,b,c)=0$.

Gradientvektoren $\nabla F(a,b,c)$ er en normalvektor til fladen S i $P:(a,b,c)$.

Den er normal til tangentplanen til fladen S i $P:(a,b,c)$.

Ligning for tangentplanen i $P:(a,b,c)$:

$$F_x(a,b,c)(x-a)+F_y(a,b,c)(y-b)+F_z(a,b,c)(z-c)=0$$

Riemann-sum. Planintegral

$z = f(x, y)$ en (kontinuert) funktion på en rektangel $R = [a, b] \times [c, d]$.
Inddeling $\mathcal{P} = \{R_1, \ldots, R_k\}$ i delrektangler. R_i har areal ΔA_i.
Vælg punkter $(x_i^*, y_i^*) \in R_i$ i hver delrektangel.
Riemann-sum: $\sum_{i=1}^k f(x_i^*, y_i^*)\Delta A_i$
beregner rumfang af et søjlediagram som approksimerer området over R og under grafen for funktionen f.
Planintegral: $\int\int_R f(x, y)dA = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{i=1}^k f(x_i^*, y_i^*)\Delta A_i$
Grænseværdien giver rumfang for området over R og under grafen for funktionen f.
$|\mathcal{P}|$: inddelingens norm: største diameter i en af R_i.
Samme definition hvis R er et mere generelt område. Nu summeres over alle de delreltangler R_i i et rektangulært gitter,

Egenskaber af planintegralet

1. $\int\int_R cf(x,y)dA = c\int\int_R f(x,y)dA,\ c \in \mathbf{R}$
2. $\int\int_R [f(x,y)+g(x,y)]dA = \int\int_R f(x,y)dA + \int\int_R g(x,y)dA$
3. $m \cdot a(R) \leq \int\int_R f(x,y)dA \leq M \cdot a(R)$
   ($a(R)$: Rs areal; $m = \min_R f(x,y)$; $M = \max_R f(x,y)$)
4. $\int\int_R f(x,y)dA = \int\int_{R_1} f(x,y)dA + \int\int_{R_2} f(x,y)dA$
   ($R = R_1 \cup R_2$; $a(R_1 \cap R_2) = 0$)

(1),(2): $\int\int_R$ er en lineær afbildning.
(3): Nedre og øvre grænser for integralet ved minimum/maksimum for funktionen på R
(4): Integralet er additiv på delområder uden indre overlap.

Beregning: Planintegral $\rightarrow$ dobbeltintegral

Faste grænser: $R = [a,b] \times [c,d]$:

$$\int\int_R f(x,y)dA = \int_{x=a}^{b} \int_{y=c}^{d} f(x,y)dydx = \int_{y=c}^{d} \int_{x=a}^{b} f(x,y)dxdy$$

Variable grænser: R

vertikalt simpel $R = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$:

$$\int\int_R f(x,y)dA = \int_{x=a}^{b} \int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx$$

horizontalt simpel

$$R = \{(x,y) \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}:$$

$$\int\int_R f(x,y)dA = \int_{y=c}^{d} \int_{x=h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy$$

Generelt: Inddel R i vertikalt eller horizontalt simple delområder (uden indre overlap). Beregn integraler over delområder og summer.

Areal. Rumfang

Areal af et område R i planen:

$$a(R) = \int\int_R 1 dA$$

Rumfang af et område $T = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in R, f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\}$
("over R, mellem $f_1(x, y)$ og $f_2(x, y)$")

$$V(T) = \int\int_R (f_2(x, y) - f_1(x, y)) dA$$

Planintegraler i polære koordinater

Definition og beregningsregel

Inddeling i polære “rektangler”:
$R = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) | 0 \le r_1 \le r \le r_2, \theta_1 \le \theta \le \theta_2\}$
Areal $A(R) = \frac{r_1+r_2}{2}(r_2 - r_1)(\theta_2 - \theta_1) = \bar{r}\Delta r \Delta\theta$.
Riemann-sum $\sum_i f(P_i)A(R_i) = \sum_i f(P_i)\bar{r}_i \Delta r \Delta\theta =$
Riemann-sum for funktion $f * r$ over sædvanlige rektangler.
Grænseovergang:

$$\int\int_R f(x,y)dA = \int_{\theta=\theta_1}^{\theta_2}\int_{r=r_1}^{r_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta) * r\,dr\,d\theta$$

Faktoren r sørger for at større polære rektangler ($\bar{r}$ stor) “vejer” mere end små polære rektangler ($\bar{r}$ lille).

Planintegraler i polære koordinater

Variable polære grænser

R radialt simpel:
$R = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) | \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, 0 \leq r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)\}$

$$\int\int_R f(x,y)dA = \int_{\theta=\theta_1}^{\theta_2}\int_{r=r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) * r\,drd\theta$$

R angulær simpel:
$R = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) | 0 \leq r_1 \leq r \leq r_2, \theta_1 \leq \theta(r) \leq \theta_2(r)\}$

$$\int\int_R f(x,y)dA = \int_{r=r_1}^{r_2}\int_{\theta=\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) * r\,d\theta dr$$

Anvendelser af planintegralet

Densitet, masse, og tyngdepunkt af en plade

Densitet: lille rektangel R : $\delta(R) = \frac{m(R)}{a(R)}$.

Punkt: $\delta(x,y) = \lim_{R\to(x,y)} \delta(R)$.

Densitet $\rightsquigarrow$ masse: $m(R) = \int\int_R \delta(x,y)dA$.

Tyngdepunkt $(\bar{x},\bar{y})$ af plade R:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{m(R)} \int\int_R x\delta(x,y)dA \\ \bar{y} &= \frac{1}{m(R)} \int\int_R y\delta(x,y)dA \end{aligned}$$

Symmetribetragtninger tillader somme tider at finde tyngdepunkt uden integralregning!

Anvendelser af planintegralet

Inertimoment af en roterende plade

En plade R drejes om en akse i rummet.
Inertimomentet af pladen beskriver “trægheden” mod (drejnings)-acceleration. Et svinghjul med stort inertimoment kræver et større drejningsmoment for at accelerere lige så meget som et hjul med mindre inertimoment. Enhed: $kg * m^2$.

$$\begin{aligned} I &= \iint_R p(x,y)^2 \delta(x,y)\, dA^1 \\ I_z &= \iint_R (x^2+y^2)\delta(x,y)\, dA \\ I_x &= \iint_R y^2 \delta(x,y)\, dA \\ I_y &= \iint x^2 \delta(x,y)\, dA \end{aligned}$$

Rumintegraler

Riemann-sum over kasser i rummet $\sum_i f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) Vol(T_i)$ approksimerer rumintegralet over legemet T $\int\int\int_T f(x,y,z) dV$.
Beregning ved hjælp af tripelintegral, f.eks. på formen

$$\int\int\int_T f(x,y,z)dV = \int_{x=a}^{b}\int_{y=y_1(x)}^{y_2(x)}\int_{z=z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dzdydx$$

Anvendelser:

- Rumfang
- Densitet $\rightsquigarrow$ masse og massemidtpunktets koordinater for rumligt legeme
- Inertimoment for rumligt legeme

Rumintegaler

Cylindriske og sfæriske koordinater

Cylindriske koordinater $(x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z)$:
$T = \{(r\cos\theta, r\sin\theta, z) | \alpha \le \theta \le \beta, r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta), Z_1(r,\theta) \le z \le Z_2(r,\theta)\}$ with $Z_i(r,\theta) = z_i(r\cos\theta, r\sin\theta)$:

$$\iiint_T f(x,y,z)dV = \int_{\theta=\alpha}^{\beta}\int_{r=r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}\int_{z=z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\, dzdrd$$

Sfæriske koordinater

$(x = \rho\sin\varphi\cos\theta, y = \rho\sin\varphi\sin\theta, z = \rho\cos\varphi)$:
$T = \{(x,y,z) | \alpha \le \theta \le \beta, \varphi_1(\theta) \le \varphi \le \varphi_2(\theta), \rho_1(\varphi,\theta) \le \rho \le \rho_2(\varphi,\theta)\}$: $\iiint_T f(x,y,z)dV =$

$$\int_{\theta=\alpha}^{\beta}\int_{\varphi=\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}\int_{\rho=\rho_1(\varphi,\theta)}^{\rho_2(\varphi,\theta)} f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\, d\rho d$$

Regning med komplekse tal

$(x, y) \leftrightarrow x + iy$

$i \cdot i = -1 (\sqrt{-1} = \pm i)$

$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

De komplekse tal $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ danner et legeme:

Additionen og multiplikationen er kommutativ og associativ.

Den distributive lov gælder (gange ind i parenteser ok).

$0 = 0 + i0$ er neutralt element mht. addition;

$1 = 1 + i0$ er neutralt element mht. multiplikation.

$(x + iy) + (-x + i(-y)) = 0$ – additiv invers.

$(x + iy) \cdot \left(\frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = 1$ – multiplikativ invers.

Komplekse tal på polær form

$z = r_\theta \leftrightarrow z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta$
$|z| = r = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0$: modulus, numerisk værdi;
θ: argument.

Multiplikation: $r_\theta \cdot r'_{\theta'} = (r \cdot r')_{\theta+\theta'}$.

Division: $\frac{r_\theta}{r'_{\theta'}} = (\frac{r}{r'})_{\theta-\theta'}$.

Potenser: $(r_\theta)^n = (r^n)_{n\cdot\theta}$.

n-te rødder: $(s_\varphi)^n = r_\theta \Rightarrow s = \sqrt[n]{r}, \varphi = \frac{1}{n}(\theta + 2k\pi), 0 \leq k < n$.
Komplekse tal $z \neq 0$ har n forskellige n-te rødder!
$s_\varphi = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n})(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}), 0 \leq k < n$.

Polynomier med komplekse koefficienter

Algebraens fundamentalsætning, (Gauss)

Ethvert komplekst polynomium $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ af grad $n \geq 1$ har mindst en (kompleks) rod $z_0 \in \mathbf{C} : P(z_0) = 0$.

Hvis z_0 er rod i $P(z)$, så findes et polynomium $Q(z)$, således at $P(z) = (z - z_0)Q(z)$ (division giver rest 0).

Ethvert komplekst polynomium $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ af grad $n \geq 1$ har inden for $\mathbf{C}$ netop n rødder (regnet med multiplicitet):

$$P(z) = a_n (z - z_1)^{m_1} (z - z_2)^{m_2} \cdot \cdots \cdot (z - z_s)^{m_s}, \sum m_i = n.$$

Ethvert reelt polynomium kan skrives som produkt af en konstant samt lineære faktorer $z - z_i$ og kvadratiske faktorer $z^2 - a_i z + b_i,\ z_i,\ a_i,\ b_i \in \mathbf{R}$

Komplekse andengradsligninger

Løsninger af ligningen $z^2 = d$:
polær form: $d = r_\theta \Rightarrow z = \pm\sqrt{r}_{\frac{\theta}{2}}$
rektangulær form: $d = d_1 + id_2$ $(r = \sqrt{d_1^2 + d_2^2})$ $\Rightarrow$

$$z = \sqrt{d} = \begin{cases} \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{r+d_1} + i\sqrt{r-d_1}), & d_2 \geq 0 \\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{r+d_1} - i\sqrt{r-d_1}), & d_2 \leq 0. \end{cases}$$

Ligningen $az^2 + bz + c = 0$:
diskriminant $D = b^2 - 4ac$.
to løsninger $z = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

Den komplekse eksponentialfunktion

Definition

$e^{x+iy} = (e^x)_y = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$.

Theorem

1. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2},\ z_1, z_2 \in \mathbf{C}$.
2. *(Eulers formler)*
   $\cos y = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy}) \quad \sin y = \frac{1}{2i}(e^{iy} - e^{-iy})$.

Differentiation: Betragt funktionen
$f(t) = e^{zt} = e^{xt}(\cos(yt) + i \sin(yt))$.

Theorem

$f'(t) = ze^{zt}$. *(Check både realdel og imaginærdel!)*

Lineære differentialligninger af 1. orden

$$x' + p(t)x = q(t) \Rightarrow x(t) = ?$$

Homogen dl: $x'(t) + p(t)x = 0 \Rightarrow \frac{x'}{x} = -p(t)$ for $x(t) \neq 0$.
Stamfunktion $P'(t) = p(t)$:
$\log x(t) = -P(t) + c \Rightarrow x(t) = Ce^{-P(t)}$.

Theorem

Løsningsmængde $L_H = \{Ce^{-P(t)} \mid C \in \mathbf{R}\}$.

Inhomogen dl: Konstanternes variation: Løsning på form
$C(t)e^{-P(t)}$: Vælg $C(t)$ som stamfunktion
$C'(t) = e^{P(t)}q(t)$.

Theorem

Lineære differentialligninger af 2. orden

Det homogene tilfælde 1

$$x''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0,\ b, c \in \mathbf{R}$$

Gæt med eksponentialfunktion på typen $x(t) = e^{Rt} \rightsquigarrow$

karakterligningen $R^2 + bR + c = 0$

med diskriminant $D = b^2 - 4c$. Tre tilfælde:

$D > 0$: Karakterligningen har to rødder $R_{1/2} = \frac{1}{2}(-b \pm \sqrt{D})$. To fundamentalløsninger $x_1(t) = e^{R_1 t}, x_2(t) = e^{R_2 t}$.
Løsningsmængde
$L_H = \{c_1 e^{R_1 t} + c_2 e^{R_2 t} \mid c_1, c_2 \in \mathbf{R}\}$.
Væsentligt: Er R_1, R_2 positive/negative?

Lineære differentialligninger af 2. orden

Det homogene tilfælde 2

$D = 0$: Karakterligningen har en dobbeltrod $R = -\frac{b}{2}$. To fundamentalløsninger $x_1(t) = e^{Rt}, x_2(t) = te^{Rt}$. Løsningsmængde $L_H = \{c_1e^{Rt} + c_2te^{Rt} \mid c_1, c_2 \in \mathbf{R}\}$.

$D < 0$: Karakterligningen har to konjugeret komplekse rødder $R_{1/2} = \frac{1}{2}(-b \pm i\sqrt{-D}) = \alpha + i\beta$. Fundamentalløsningerne $x_1(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t, x_2(t) = e^{\alpha t}\sin\beta t$ fås som realdel, hhv. imaginærdel af $e^{R_1 t}$. Løsningsmængde $L_H = \{c_1e^{\alpha t}\cos\beta t + c_2e^{\alpha t}\sin\beta t \mid c_1, c_2 \in \mathbf{R}\}$. Igen: Er α positiv/negativ?

Eksistens - og entydighedssætning

Lineære differentialligninger

1. orden: $x' + p(t) \cdot x = q(t) \qquad (I_1)$
$p(t), q(t)$ kontinuerte funktioner på åbent interval I.

Theorem

Givet $t_0 \in I$ og $x_0 \in \mathbf{R}$. Så har dl (I_1) netop en løsning som opfylder begyndelsesbetingelsen $x(t_0) = x_0$.

2. orden: $x'' + bx' + cx = q(t) \qquad (I_2)$
$q(t)$ kontinuert funktion på åbent interval I.

Theorem

Givet $t_0 \in I$ og $x_0, v_0 \in \mathbf{R}$. Så har dl (I_2) netop en løsning som opfylder begyndelsesbetingelserne $x(t_0) = x_0$ og $x'(t_0) == v_0$.

Superposition

Homogene og inhomogene lineære differentialigninger

$$\begin{aligned} x'' + bx' + cx &= 0 \qquad (H) \\ x'' + bx' + cx &= q(t) \qquad (I) \end{aligned}$$

- $y(t)$ løser (I), $x(t)$ løser (H)$\Rightarrow y(t) + x(t)$ løser (I).
- $y_1(t), y_2(t)$ løser (I)$\Rightarrow y_1(t) - y_2(t)$ løser (H).
- y løser (I)$\Rightarrow L_I = y + L_H = \{y + x \mid x \in L_H\}$.

Hvis man kender en (partikulær) løsning $y(t)$ til ligning (I), så er alle andre løsninger på formen $y(t) + x(t)$ med $x(t)$ en løsning til ligning (H).

Superposition

generel

$$x'' + bx' + cx = q_1(t) \qquad (I_1)$$
$$x'' + bx' + cx = q_2(t) \qquad (I_2)$$

- $y_1(t)$ løser (I_1),$y_2(t)$ løser (I_2)$\Rightarrow y_1(t)+y_2(t)$ løser $x'' + bx' + cx = q_1(t)+q_2(t)$.
- $y_1(t)$ løser (I_1),$r\in$ **R** $\Rightarrow r\cdot y_1(t)$ løser $x'' + bx' + cx = r\cdot q_1(t)$.
- $y_1(t)$ løser (I_1),$y_2(t)$ løser (I_2),$r,s\in$ **R** $\Rightarrow ry_1(t) + sy_2(t)$ løser $x'' + bx' + cx = rq_1(t) + sq_2(t)$.

Årsag: $x \mapsto x'' + bx' + cx$ er en lineær operator.

Inhomogene lineære differentialligninger

Gættemetode

$$x'' + bx' + cx = q(t) \text{ og } q(t)$$

et polynomium $q(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$.
Prøv $y(t) = b_n t^n + \cdots + b_1 t + b_0$ – et polynomium af samme grad. $\rightsquigarrow$ lineært ligningssystem.

en eksponentialfunktion $q(t) = ke^{rt}$.
Prøv $y(t) = le^{rt}$ – en eksponentialfunktion med samme eksponent. $\rightsquigarrow$ lineær ligning.

en trigonometisk funktion $q(t) = k \cos \omega t$ eller $q(t) = l \sin \omega t$.
Prøv $y(t) = m \cos \omega t + n \sin \omega t$. $\rightsquigarrow$ lineært ligningssystem.