Dette miniprojekt handler om en perspektivprojektion – fra 3D til 2D-tegneplanen. Der indgår to faser: først en justering af øjepunktet (øje eller kamera) og en centrering af midtpunktet. Og herefter den egentlige centralprojektion. Begge dele ønskes behandlet matematisk og illustreret i Rhino og Grasshopper.

A. Øjepunktet E har 3D-koordinater $E : (2, 0, -2)$ og objektets midtpunkt C har koordinater $C : (5, 4, 10)$.

1. Bestem en 4×4 matrix T som beskriver den translation der overfører E i Origo $O : (0, 0, 0)$ og C i et "nyt" midtpunkt C' – med hvilke koordinater?
2. Bestem standard matricen R_z (3×3) for en drejning om Z-aksen som overfører C' i et punkt C'' i YZ-planen.
3. Bestem standard matricen R_x (3×3) for en drejning om X-aksen som overfører C'' i et punkt C''' på Y-aksen – lige foran øjet.
4. Bestem en 4×4 matrix S som beskriver hele justerings-transformationen ved hjælp af de tre fundne matricer.
5. Illustrer transformationerne i Rhino og Grasshopper med udgangspunkt i en kasse med variable sidelængder omkring midtpunktet C.

B. Vi betragter nu en centralprojektion C med øjepunkt i Origo og den lodrette plan $Y = 1$ som billedplan. Den kan i formler udtrykkes ved

$$\begin{aligned} C : \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 |\ y > 0\} &\rightarrow \mathbf{R}^2 \\ C([x, y, z]) &= [\frac{x}{y}, \frac{z}{y}]. \end{aligned}$$

og bestemmer koordinaterne for snitpunktet (sporet) mellem linien fra Origo til punktet (x, y, z) og billedplanen. Vi undersøger billedet af en halv-linje l fra et punkt $[a, 1, b]$ i billedplanen med retningsvektor $[x, y, z]$ – og dermed parmaeterfremstilling

$$l : \mathbf{x}(t) = \overrightarrow{OP_t} = [a, 1, b] + t[x, y, z],\ t \geq 0.$$

Indsættes $\mathbf{x}(t)$ i formlen for C fås følgende parameterfremstilling for billedet:

$$\begin{aligned} C(\mathbf{x}(t)) &= [\frac{a + tx}{1 + ty}, \frac{b + tz}{1 + ty}] \\ &= [a, b] + \frac{ty}{1 + ty}([\frac{x}{y}, \frac{z}{y}] - [a, b]). \end{aligned}$$

1. Gør rede for at forsvindingspunktet $V_l := \lim_{t \to \infty} C(\mathbf{x}(t))$ for halvlinjen l har koordinater $V_l : (\frac{x}{y}, \frac{z}{y})$;
og konkluder at parallele linjer har det samme forsvindingspunkt.
2. Gør rede for at halvlinjen l under centralprojektionen afbildes i det rette liniestykke mellem (a, b) og forsvindingspunktet $V_l : (\frac{x}{y}, \frac{z}{y})$ i projektionsplanen.[1]
3. Illustrer centralprojektionen i Rhino og Grasshopper: Tegn en kasse med variable hjørnepunkter i $(\pm a, 13 \pm a, \pm b)$. Flyt kassen vertikalt op og ned i "perpective"-vinduet og find frem til forsvindingspunkter for kassens kantlinjer. Kommandoen `make2D` (current view) kan hjælpe.

[1]Derfor tegner man billedet af et linjestykke mellem to 3D-punkter bare som linjestykket mellem deres 2D-billeder.
Vink: Overvej hvor stor faktoren $\frac{ty}{1+ty}$ kan blive for $0 \leq t < \infty$.

FREDRIK BAJERSVEJ 7G
9220 AALBORG ØST

9940 8855
-

RAUSSEN@MATH.AAU.DK
PEOPLE.AAU.DK/~RAUSSEN