Repetition og perspektivering:

kl. 12:30 – 13:00 i Auditorium 3.
Gaussalgoritme for lineære ligningssystemer.
Linearkombinationer og spænd.

Forelæsningens 1. del:

kl. 13:05 – 13:40 i Auditorium 3.

Mål og indhold:

Vi skal til at undersøge hvor mange vektorer man skal bruge for at udspænde en plan, rummet eller evt. større "hyperrum".

1. Hvornår udspænder et antal vektorer hele $\mathbf{R}^n$ – med alle vektorer med n koefficienter? Sæt vektorerne i en matrix. Denne matrix skal have rang n – Pivoter i hver række (Theorem 1.6)
2. Hvornår kan man udelade den sidste vektor i en liste uden at spændet bliver mindre? Det kan man når den sidste vektor er indeholdt i spændet af de forudgående (Theorem 1.7)
3. En vektor i spændet er en linearkombination $\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_k\mathbf{u}_k$. Er koefficienterne $c_1, \cdots, c_k$ entydigt bestemt – har $\mathbf{v}$ en entydig "adresse"?

Det sidste spørgsmål fører til definition for lineær uafhængighed og afhængighed – hvor man undersøger spørgsmål (3) for $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

En mængde vektorer $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ kaldes lineært afhængig, hvis vektorligningen (afhængighedsrelationen)

$$c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$$

har andre løsninger end den *trivielle* løsning $c_1 = \cdots = c_k = 0$ – og lineært uafhængig ellers.
En lineært afhængig mængde af vektorer har den egenskab at (mindst) en af vektorerne kan udtrykkes som linearkombination af de andre. Denne vektor kan derfor udelades, hvis man vil udtrykke spændet af vektorerne $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ så økonomisk som muligt.

Litteratur:

(SIF) ch. 1.6, pp. 70 – 72; ch. 1.7, pp. 75 – 78.

Opgaveregning:

kl. 9:30 – 11:20 i grupperummene.

Opgaver:

SIF, ch. 1.4, pp. 52 – 54 11, 31, 35, 47, 53 – 72, 75, 77, 81[1], 93[2]

SIF, ch. 1.6, pp. 72 – 74 7, 13, 27, 35, 43.

[1] Hvordan ser sidste række ud i den reducerede echelonmatrix som er ækvivalent til A?
[2] Beregn $A(\mathbf{u} + \mathbf{v})$.

Forelæsningens 2. del:

kl. 15:40 – 16:15 i Auditorium 3.

Mål og indhold:

Hvornår er op til tre vektorer lineært uafhængige?
Én vektor **v** er lineært afhængig, hvis den er lig med **0**-vektoren - ellers er den lineær uafhængig og udspænder en linje.
To vektorer er lineært afhængige hvis de er parallele. I så fald udspænder de kun en linje – eller nulrummet; hvis de er lineært uafhængige, så udspænder de en plan.
Tre vektorer i rummet udspænder hele rummet hvis og kun hvis de er lineært uafhængige; er de lineært afhængige, udspænder de noget mindre: en plan, en linje eller bare nulrummet.

Generelt er et antal vektorer lineært uafhænginge, hvis enhver vektorer i deres spænd er en entydig linearkobination af disse vektorer; hver vektor har kun en adresse i det "lineære postvæsen"!

$$\underbrace{\overbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}}^{\text{independent}}, \begin{bmatrix}4\\2\\3\end{bmatrix}}_{\text{dependent}}$$

Metode: Hvordan finder man ud af om en mængde vektorer er lineært uafhængig? Man indsætter vektorerne som søjler i en matrix A. Vektorerne er lineært uafhængige hvis hver søjle i denne matrix A er en Pivotsøjle – for så har matrixligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ kun den trivielle løsning $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

En god sammenfatning om information som ligger i rangen af matricen A findes i lærebogen på side 83.

Litteratur:

- (SIF) ch. 1.6, pp. 78 – 83
- Wikipedia

Næste gang:

Torsdag, den 23.9., kl. 8:15 – 12:00.
Introduktion til Grasshopper.
Mandag, den 27.9., kl. 12:30 – 16:15.
Miniprojekt 1.

FREDRIK BAJERSVEJ 7G — 9940 8855 — RAUSSEN@MATH.AAU.DK
9220 AALBORG ØST — - — PEOPLE.AAU.DK/~RAUSSEN