Lineære transformationer i A&D 7. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

20.9.2010

Lineær (u)afhægnighed

Definition

- En ligning $x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$ med reelle tal x_i kaldes en afhængighedsrelation mellem vektorerne $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ i $\mathbf{R}^n$.
- En mængde vektorer $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ kaldes lineært afhænging hvis de tillader en ikke-triviel afhængighedsrelation, dvs. en hvor ikke alle x_i er lig med 0.
- Mængden kaldes lineært uafhængig hvis den eneste afhængighedsrelation mellem dem er givet ved den trivielle relation $x_1 = \cdots = x_p = 0$.
- Betydning: Lineært afhængige vektorer udspænder mindre end deres antal "berettiger til".
  Ikke-trivelle afhængighedsrelationer fører til "spild".
- Spændet af lineært uafhængige vektorer er maksimalt stort i forhold til antal af vektorerne. Hver vektor i spændet er entydig linearkombination af disse vektorer.

Lineær (u)afhægnighed
En opskrift

Hvordan afgør man om en mængde $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ af vektorer i $\mathbf{R}^n$ er lineært afhængig eller uafhængig?

1. Dan matricen $A = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p]$ med vektorerne som søjlevektorer.
2. Rækkereduktion til echelonform.
3. Hvis alle søjler er Pivotsøjler, så er vektorererne lineært uafhængige – ellers lineært afhængige.

Hvorfor?

$x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0} \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ med $\mathbf{x}^T = [x_1, \cdots, x_p]$.
En ikke-triviel afhængighedsrelation svarer altså til en ikke-triviel løsning af ligningssystemet givet ved matrixligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$: mindst en fri variabel!

Lineær uafhængighed

Nogle kriterier

- Hvis **0**-vektoren er indeholdt i en mængde vektorer, så er denne mængde altid lineært afhængig.
- En mængde af p vektorer i $\mathbf{R}^n$ er altid lineært afhængig såfremt $p > n$ – flere vektorer end dimensionen.
- En mængde af vektorer i $\mathbf{R}^n$ er lineært afhængig hvis og kun hvis en af vektorerne er linearkombination af de andre.
- Med andre ord: En mængde af vektorer i $\mathbf{R}^n$ er lineært afhængig hvis og kun hvis man kan fjerne en eller flere vektorer uden at spændet bliver mindre.
- Den er lineær uafhængig hvis fjernelse af en af vektorerne altid fører til et mindre spænd.

Rang af en matrix

Vigtige interpretationer

Rangen af en $m \times n$ matrix A = antal af Pivotsøjler.

A har rang m $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er konsistent for alle $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$;
As søjlevektorer udspænder hele $\mathbf{R}^m$;
en Pivotposition i hver række.

A har rang n $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har højst en løsning for et $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$;
As søjlevektorer er lineært uafhængige;
en Pivotposition i hver søjle.