Lineære transformationer i A&D 15. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

4.11.2010

Beregning af invers matrix
En opskrift - for matricer af moderat størrelse

1. Givet en $n \times n$-matrix A. Opstil den udvidede $n \times 2n$-matrix
$$[A|I_n]$$
med en enhedsmatrix I_n på højresiden.
2. Rækkeoperationer: Overfør denne udvidede matrix til reduceret echelonform $[H|C]$.
3. Hvis $H = I_n$ – Pivoter i hver søjle – så er A invertibel og $C = A^{-1}$.
4. Hvis $H \neq I_n$, så er A ikke invertibel.

Elementære matricer I

Definition og egenskaber

En rækkeoperation på en $m \times n$-matrix A kan blive realiseret ved multiplikation EA med en elementær matrix E.

En elementær matrix er "næsten" en enhedsmatrix bortset fra

- Rækkeombytning (i-te og j-te række): 0 på diagonalen ved $_{ii}$ og $_{jj}$, 1 ved $_{ij}$ og $_{ji}$: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- Rækkemultiplikation ($r \times i$-te række): r i stedet for 1 ved $_{ii}$: $\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Rækkeaddition ($r \times i$-te række lægges til j-te række): r i stedet for 0 ved $_{ji}$: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{bmatrix}$

En elementær matrix er invertibel. Dens inverse matrix er den elementære matrix som svarer til den omvendte rækkeoperation.

Elementære matricer II

i forbindelse med rækkeoperationer

- Hver rækkeoperation svarer til multiplikation med en elementær matrix.
- Hvis A og B er rækkeækvivalente, så findes en invertibel matrix således at $B = PA$.
- Det gælder specielt når B er den reducerede echelonmatrix svarende til A.
- Søjlekorrespondens mellem søjler i rækkeækvivalente matricer A og B:

$$\mathbf{b}_i = \sum_{j \neq i} c_j \mathbf{b}_j \Leftrightarrow \mathbf{a}_i = \sum_{j \neq i} c_j \mathbf{a}_j.$$

- En Pivotfri søjle er linearkombination af foranstående Pivotsøjler.

Hvornår er en kvadratisk matrix A invertibel?

Flere ækvivalente kriterier

- A er rækkeækvivalent til enhedsmatricen I_n.
- A har n Pivot positioner (og dermed en i hver række, en i hver søjle).
- $\text{rang}(A) = n$.
- $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ injektiv ($A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$).
- As søjler er lineært uafhængige.
- $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ surjektiv ($A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har løsning for alle $\mathbf{b}$).
- As søjler udspænder $\mathbf{R}^n$.
- A kan skrives som produkt af elementære matricer.