Lineære transformationer i A&D
20./22. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

30.11. og 6.12.2010

En ortogonal operator (lineær afbildning) $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ med (ortogonal) standardmatrix Q er enten en

drejning med $Q = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ med $\det Q = 1$ eller en

spejling med $Q = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$ med $\det Q = -1$

For sammensætningen $T \circ U$ af to ortogonale operatorer T, U i planen gælder: $T \circ U$ er en

drejning hvis T, U er drejninger, hhv. spejlinger begge to

spejling hvis en af dem er drejning og den anden en spejling.

Stive flytninger

Definition

En afbildning $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ kaldes en stiv flytning hvis den bevarer alle afstande mellem vektorer, dvs. når
$\| F(\mathbf{u}) - F(\mathbf{v}) \| = \| \mathbf{u} - \mathbf{v} \|$.

Theorem

En stiv flytning er altid på formen $F(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v}) + \mathbf{b}$ hvor T er en ortogonal operator.
Altså er F sammensætning af en ortogonal operator med en parallelforskydning.

Stive flytninger i planen

En stiv flytning i planen er enten en

translation $F(\mathbf{v}) = I\mathbf{v} + \mathbf{b}$ eller en

rotation $F(\mathbf{v}) = Q\mathbf{v} + \mathbf{b}$ med Q en drejningsmatrix – drejning med centrum $\mathbf{x}_0 = (I - Q)^{-1}\mathbf{b}$ – eller en

spejling $F(\mathbf{v}) = R\mathbf{v} + \mathbf{b}$ med R en spejlingsmatrix og $\mathbf{b} \perp$ spejlingsaksen eller en

glidespejling $F(\mathbf{v}) = R\mathbf{v} + \mathbf{b}$ med R en spejlingsmatrix og $\mathbf{b} \parallel$ spejlingsaksen.

Fraktaler

Nogle karakteristika for fraktale figurer:

- Indviklet finstruktur
- selv-similær (zoom ligner oprindelig figur)
- ofte en dimension mellem to hele tal
- kan frembringes rekursivt (ved at gentage samme operationer gang på gang)

Itererede funktionssystemer (IFS)

En afbildning $F : B \to B$ (med et begrænset og lukket definitionsområde $B \subset \mathbf{R}^n$, for eksempel en rektangel, kaldes kontraherende hvis der er en kontraktionsfaktor $c < 1$ sål. at

$$\| F(\mathbf{u}) - F(\mathbf{v}) \| \leq c(\| \mathbf{u} - \mathbf{v} \|) :$$

Alle afstande formindskes.
Et IFS består af et antal kontraherende afbildninger $F_1, \cdots, F_k : B \to B$. Med $\emptyset \neq C \subset B$ en vilkårlig ikke-tom delmængde dannes succesivt:
$C_0 = C, C_{n+1} = F_1(C_n) \cup \cdots \cup F_k(C_n)$.
Følgen af delmængder konvergerer mod den samme fraktale figur unanset valget af startmængden C.
Eksempler: Sierpinskis trekant. Barnsleys bregne.