

Køreplan:

Repetition og perspektivering:

8:15 – 8:45 i auditorium 4.

Forelæsnings 1. del:

8:50 – 9:25 i auditorium 4.

Opgaveregning:

9:30 – 11:20 i grupperummene.

Forelæsnings 2. del:

11:25 – 12:00 i auditorium 4.

Næste gang:

Torsdag, 3. maj, kl. 8:15 – 12:00.

Matrixmultiplikation. Sammensætning af lineære afbildninger.

Mål og indhold:

Repetition:

Span af et antal vektorer. Lineær (u-)afhængighed: Definitioner og afgørelsesmetoder.

Nyt stof:

Vi kommer til en ny anvendelse for matrixer: som beskrivelse for **lineære afbildninger**.

En afbildning $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ (f.eks. en projektion fra rummet ind i planen, f.eks. en opstalt) lader til enhver vektor $\mathbf{x}$ i **definitionsområdet**¹ $\mathbf{R}^n$ svare en vektor $T(\mathbf{x})$ i **dispositionsområdet**² $\mathbf{R}^m$ – den "spiser" n -vektorer og "afleverer" m -vektorer. Sådan en afbildning³ kaldes **lineær**, hvis den **respekterer linearkombinationer**, se definitionen og egenskaber på lærebogens s. 171. Nogle vigtige egenskaber: En lineær afbildning

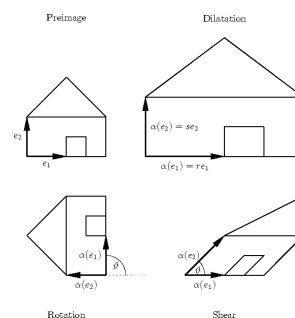
- overfører rette linier i rette linier

¹eng.: domain

²eng.: codomain

³eng.: transformation, map

- bevarer proportioner langs med en ret linie



Vi verificerer at afbildningen $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, som er givet ved multiplikation med en $m \times n$ -matrix A , altså $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, er lineær.

Standardmatricen for en lineær afbildning: Faktisk kan man beskrive enhver lineær afbildning $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ som en matrixafbildning $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, hvor A er en $(m \times n)$ -matrix, som kaldes **standardmatricen** (eller matrixpræsentationen) for den lineære afbildning T .

Her er **opskriften** til hvordan man finder A : Man tager **standard enhedsvektorene** $\mathbf{e}_i$; et 1-tal i position i , 0-taller på alle andre positioner. Så bestemmer man deres billeder $T(\mathbf{e}_i)$ under den lineære afbild-

ning T . Disse vektorer $T(\mathbf{e}_i)$ indsættes nu efter tur som søjler i standardmatricen A . På formelsprog:

$$A = [T(\mathbf{e}_1), \dots, T(\mathbf{e}_n)].$$

Konsekvens: En lineær afbildning kan beskrives ekstremt økonomisk: Man behøver kun at kende de nm talkoefficienter i afbildningens standardmatrix!

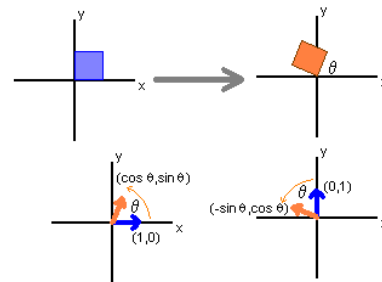
Geometriske eksempler for lineære afbildninger:

Mange geometrisk væsentlige afbildninger er lineære, og vi bestemmer deres standardmatricer:

- drejninger om Origo i plan og rum,
- spejlinger i en linie gennem Origo i planen, hhv. i en plan gennem Origo i rummet,
- skaleringer,
- strækninger og skrumpninger i aksernes retninger,
- shears = "vridninger",

- projektioner (vigtig i forbindelse med teknisk tegning)

• ...



Litteratur:

MF ch. 2.7, pp. 167 – 175.

Wikipedia Linear map

Software:

Med den følgende applet fra nettet kan man illustrere effekten af en lineær afbildning $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ fra planen ind i planen:

- Linear Transformations

Opgaver:

MF, 2.7, pp. 175 – 179 1, 3, 7, 9, 21.

MF, 1.7, pp. 84 – 86 5, 11, 17, 23, 41, 63 – 84.