Køreplan:

Repetition og perspektivering:

kl. 8:15 – 8:45 i auditorium 3.

Forelæsningens 1. del:

kl. 8:50 – 9:25 i auditorium 3.

Opgaveregning:

kl. 9:30 – 11:20 i grupperummene.

Forelæsningens 2. del:

kl. 11:25 – 12:00 i auditorium 3.

Næste gang:

Onsdag, 16.3., kl. 8:15 – 12:00.
Miniprojekt 2.
Introduktion kl. 8:15 i auditorium 3.

Mål og indhold:

Repetition:

Inverse matricer: Definition og beregning.
Elementære matricer.

Nyt stof:

Vi ser på behandling af 3D-transformationer (især rumlige rotationer og translationer) i grafisk software – det vil komme til at spille en rolle i et efterfølgende miniprojekt.

I første omgang ser vi på rotationer om de tre rumlige akser med en vinkel θ og finder deres 3×3-standardmatricer R_θ, P_θ og Q_θ i bogens notation (ch. 6.9, pp. 465 ff). Skal man dreje om en vertikal akse der går gennem vektoren $\mathbf{b} = [b_1, b_2, 0]$ i XY-planen (i stedet for Origo), så kan man beskrive denne drejning ved en rotation om Z-aksen og en translation:

$$\begin{aligned} R_\theta^{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) &= R_\theta(\mathbf{x}-\mathbf{b})+\mathbf{b} \\ &= R_\theta(\mathbf{x})+(I-R_\theta)(\mathbf{b}) \qquad (1) \end{aligned}$$

Mere generelt kan man beskrive en rotation om en akse i rummet ved en ortogonal 3×3-matrix Q – for den gælder $QQ^T = I$ eller også $Q^{-1} = Q^T$. Faktisk kan man beskrive enhver rumlig rotation som sammensætning af rotationer om de tre koordinatakser (Euler vinkler)

Kan man beskrive parallelforskydninger med matricer? I første omgang ser det sort ud: En parallelforskydning T med vektoren $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^3$ er ikke lineær undtagen for $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Men man kan hjælpe sig ved at gå over til en større dimension:

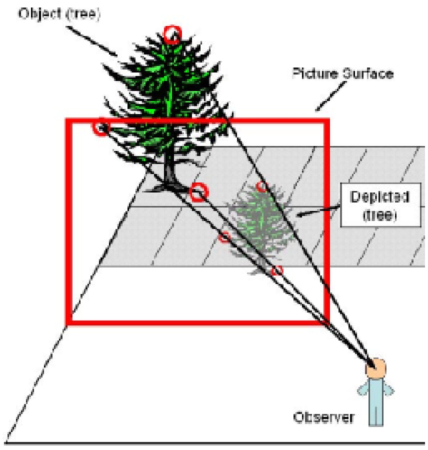
I stedet for 3D-vektorer $[x, y, z]^T$ ser vi på 4D-vektorer $[x, y, z, 1]^T$ med sidste koordinat **1**. Parallelforskydningen $T_\mathbf{a}$ med 3D-vektoren $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3] \in \mathbf{R}^3$ kan så beskrives ved matricen

$$A_\mathbf{a} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

idet
$A_\mathbf{a}[x, y, z, 1]^T = [x + a_1, y + a_2, z + a_3, 1]^T$.

En perspektivprojektion (fra 3D til 2D) er ikke en lineær afbildning. Den er ikke defineret for alle rumlige vektorer, den overfører ikke parallele rette linjer i parallele rette linjer... Alligevel kan mange af vores erfaringer med lineære transformationer bruges.

Fredrik Bajersvej 7G
9220 Aalborg Øst
9940 8855
-
raussen@math.aau.dk
people.aau.dk/~raussen



I det simpleste tilfælde har vi følgende set-up: Øjepunktet placeres i Origo. Lærredet placeres i den lodrette plan givet ved ligningen $y = 1$ placeret lige foran øjet. Nu forbindes hvert objekt i den del af rummet foran betragteren ($y > 0$) gennem en ret linje med øjepunktet og man registrerer hvor denne linje skærer billedplanen. I formler er projektionen givet ved

$$\begin{aligned} C : \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \mid y > 0\} &\rightarrow \mathbf{R}^2 \\ C([x,y,z]) &= [\frac{x}{y}, \frac{z}{y}]. \end{aligned}$$

Litteratur:

MF Ch. 6.9. I dette afsnit får perspektivprojektion en anden beskrivelse. Her lægges billedplanen (lige som i et rigtigt øje eller i en kamera) bag ved betragteren.

Netartikel Mathematics of Perspective Drawing

Wikipedia Euler angles

Perspective

Opgaver:

Ch.2.4 17, 35 – 54.

Ch. 6.9 1, 3, 5.

Text Bestem den (4×4)-matrix T der beskriver en translation (parallelforskydning) med vektoren $[1, 2, -4]^T$. Herefter den 4×4-matrix der beskriver en rotation med vinklen 45^0 en lodret akse der går igennem punktet $[1, 2, 0]$. Se formel (1).