

Køreplan:

Repetition:

bortfalder denne gang. Vi begynder på en frisk med et nyt emne.

Forelæsnings 1. del:

kl. 8:15 – 8:50 i auditorium 3.

Forelæsnings 2. del:

kl. 8:55 – 9:25 i auditorium 3.

Opgaveregning:

kl. 9:30 – 11:20 i grupperummene.

Forelæsnings 3. del:

kl. 11:25 – 12:00 i auditorium 3.

Næste gang:

Tirsdag, 29.5., kl. 12:30 – 16:15.

Miniprojekt 3.

Mål og indhold:

Emneskift: De resterende kursusange beskæftiger vi os med beskrivelse og analyse af krumme **kurver** i plan og rum. Redskabet hertil er **vektor**funktioner af én variabel. Ideen er, at man til hver tidspunkt t i definitionsintervallet knytter en foranderlig **vektor** $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle^1$, som peger på punktet P_t givet ved $\overrightarrow{OP_t} = \mathbf{r}(t)$.²

Vektorene $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ³ står for de tre standardenhedsvektorer i rummet; $x(t), y(t), z(t)$ kaldes for vektorfunktionens **koordinatfunktioner**. Man siger at $\mathbf{r}(t)$ er en parameterfremstilling for kurven bestående af alle punkter P_t .

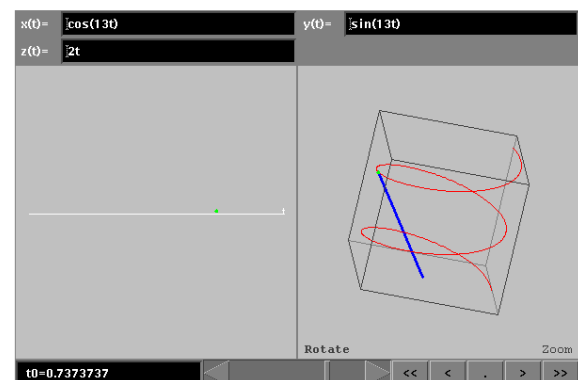
¹Lærebogen bruger parenteser $\langle \rangle$ i notationen for vektorer; vi vil som oftest bare bruge notationen med runde parenteser $()$ eller kantede parenteser $[]$ som I kender til

²Ved bevægelser i planen bruger man kun to koordinatfunktioner $x(t), y(t)$ og standardenhedsvektorene $\mathbf{i}, \mathbf{j}$.

³i stedet for $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$

Parametrization of a 3D Curve

This demo illustrates the connection between a parameter t (scrollable) and the curve it parametrizes:

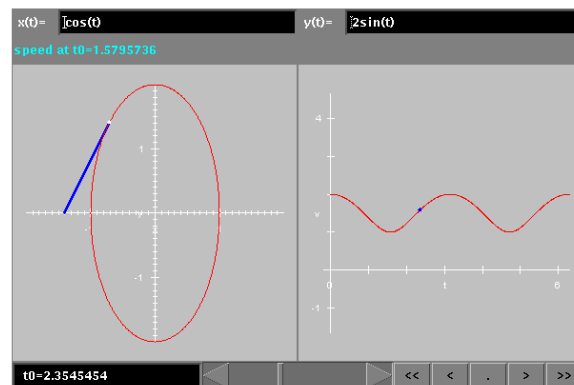


Det er nemt at forholde sig til **differentiation** af vektorfunktioner: Man differentierer bare hver koordinatfunktion for sig – hvis altså koordinatfunktionerne er differentiable. Derfor er det heller ikke ret forbavsende, at de sædvanlige regler for differentiation af summer og produkter af funktioner kan overføres til vektorfunktioner; se Theorem 2 på s. 272. Bemærk at produktreglen også gælder for prikprodukter

og krydsprodukter!

Moving velocity vector and speed

This applet illustrates the (blue) velocity vector along a curve. Its length is the speed v of the parametrization, shown in the right-hand illustration..



Hvilken geometrisk/mekanisk betydning har de afledede vektorfunktion så? Den afledede $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ af vektorfunktionen $\mathbf{r}(t)$ står for hastighedsvektoren i punktet P_t . Dens længde $v(t) = |\mathbf{v}(t)|$ er den momentane fart; dens retning er tangent til kurven givet ved $\mathbf{r}(t)$ i punktet P_t – med mindre $\mathbf{v}(t) = \mathbf{0}$. Den dobbelte afledede $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$ står for accelerationsvektoren, hvis længde $a(t) = |\mathbf{a}(t)|$ er

den momentane acceleration. Den er som regel **ikke** lig med den afledede af farten $v(t)$ – tænk blot på bevægelsen af en satellit rundt om jorden. Mere om dette næste gang!

Også **integration** af vektorfunktioner foregår koordinatvis. Det tillader at bestemme vektorfunktionen $\mathbf{r}(t)$ for en bevægelse hvis bare man kender til parameterfremstillingens accelerationsfunktion $\mathbf{a}(t)$ samt til begyndelsesvektor $\mathbf{r}(t_0)$ og begyndelseshastighed $\mathbf{v}(t_0)$.

Litteratur:

MF Ch. 11.5, pp. 269 – 279.

Komp Kompendium i Calculus. Købes i boghandelen.

Wikipedia Vector-valued function

Software:

A Geometric Laboratory

Opgaver:

Grundrelation Forklar, at

$$(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1 \text{ for enhver vinkel } \theta.^4$$

Differentiationsgymnastik Differentier

hver af de sædvanlige funktioner

$$y = x^3, \sin x, \cos x, x \sin x, x^2 \cos x, \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \sin 2x, \cos(x^2), e^x, e^{2x}, e^{x^2}.$$

Integrationsgymnastik Integrer hver af de sædvanlige funktioner

$y = x^3, \sin x, \cos x, \sin 2x, e^x$ – find først stamfunktioner og herefter integralet fra $x = 0$ til $x = 2$.

MF, Ch. 11.5, pp. 280 – 282 $1, 3^5, 7^6, 9^7, 15^8, 19^9, 29^{10}$.

⁴Hvor lang er vektoren $[\cos \theta, \sin \theta]$? Se evt. p. 374.

⁵Match parameterfremstillingerne med figurene øverst på siden. Om nødvendigt kan det geometriske laboratorium hjælpe.

⁶Facit: $\mathbf{r}'(0) = [2, -1]$

⁷Facit: $\mathbf{r}'(\frac{3}{4}) = [6\pi, 0]$

⁸Facit: $\mathbf{v}(t) = [-3 \sin t, 3 \cos t, -4], v(t) = 5, \mathbf{a}(t) = [-3 \cos t, -3 \sin t, 0]$

⁹Facit: $[\frac{484}{15}, 0]$

¹⁰Facit: $\mathbf{r}(t) = [2, t^2, 5t - t^3]$