Køreplan:

Repetition og perspektivering:

kl. 8:15 – 8:45 i auditorium 3.

Forelæsningens 1. del:

kl. 8:50 – 9:25 i auditorium 3.

Opgaveregning:

kl. 9:30 – 11:20 i grupperummene.

Forelæsningens 2. del:

kl. 11:25 – 12:00 i auditorium 3.

Næste gang:

Tirsdag, 5.6., kl. 12:30 – 16:15.
Workshop med opgaver.

Mål og indhold:

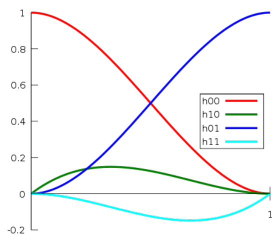
Repetition:

Buelængde. Acceleration. Krumning for kurver.

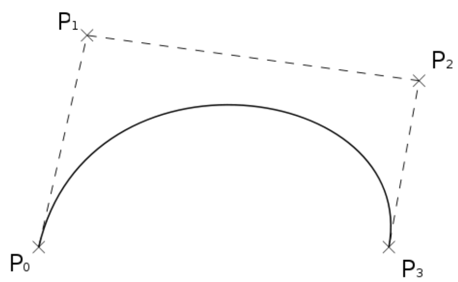
Nyt stof:

Hvordan husker og behandler et tegneprogram en kurve? Vi skal lære om brug af styrepunkter, som man bruger til at interpolere, hhv. approksimere kurvestykker. Disse repræsenteres vha. parameterfremstillinger, hvis koordinater er 3. grads polynomier. Grundideen er velkendt fra skolen: find et polynomium givet værdier for polynomiet og dens afledede til bestemte (tids)punkter!

Vi behandler først kubiske parameterfremstillinger (som parametriserer Hermite-kurver) – vektorfunktioner, hvis koordinater er 3.grads-polynomier. Kurverne fastlægges gennem endpunkternes koordinater og hastighedsvektorer i disse punkter – ved faste 3. grads polynomier.



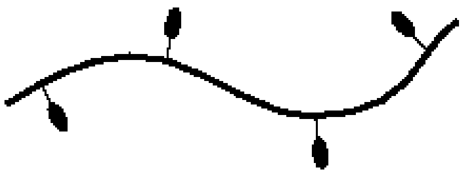
Designmæssigt mere fleksibelt er de såkaldte (kubiske) Bézier-kurver, hvor styrepunkterne bruges som "magneter" der styrer kurvens udseende. Bézier-kurver styres af de såkaldte Bernstein polynomier.



Hermite-kurver og Bézier-kurver giver det samme resultat, som repræsenteres forskelligt. Man kan nemt regne om fra den ene form til den anden – og interpretere resultatet på en tegning.

Bézierkurver kan konstrueres ved hjælp af de Casteljau's algoritme, som leder i få trin fra kontrolpunkterne til kurven. Se appletten nedenfor.

Når man vil finde en rimelig glat kurve, der går igennem et antal punkter i plan eller rum, bruger man tit en kubisk spline som løsning. Den er sammensat af kubiske kurver mellem to på hinanden følgende punkter, og således, at krumningen bliver en kontinuert funktion. Navnet spline (trækstok?) kommer fra et tegneinstrument som blev brugt især i forbindelse med skibsgyggeri.



Kubiske splines har grad 3 – nemt at arbejde med for en computer – og har som følge kontinuerte accelerationsvektor og krumninger. Dette er tilstrækkelig for mange formål, men ikke når turbulensfænomener stiller større krav. I så fald skal man op til grad 5.

En anden ulempe ved kubiske splines: Man har ingen lokal kontrol. En ændring af bare et styrepunkt laver om på hele kurvens forløb.

Litteratur:

Architectural Geometry Pottmann, Asperl, Hofer, Kilian, *Architectural Geometry*, Bentley Institute Press, 2007, 259 – 269.

Wikipedia Bézier curve

Wikipedia De Casteljau's algorithm

Wikipedia Splines

Slides Splines. NURBS

Grasshopper Essential Mathematics For Computational Design, pp. 22–23.

Applet:

- Casteljau's algoritme

Opgaver:

Kurver og deres krumning Se på kurver og krumningsfunktioner på side 2. Hvilken krumningsfunktion svarer til hvilken kurve?

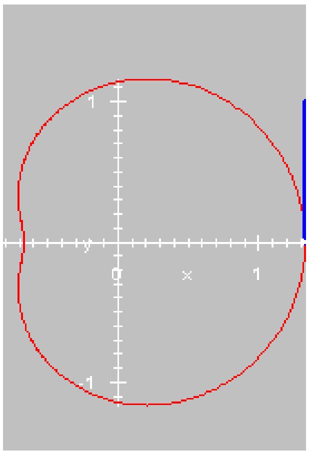
Kurvers krumning E& P, 11.6, pp. 295 – 297: 9[1], 11, 33[2].

Acceleration: tangential og normal 25[3], 43[4].

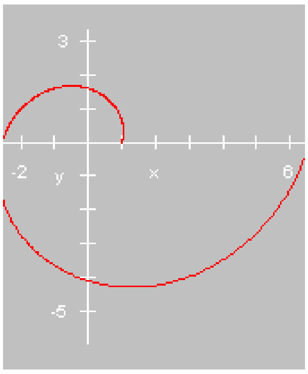
Hermitekurve Bestem en Hermitekurve $\mathbf{p}(t)$ med $\mathbf{p}(0) = [0,0], \mathbf{p}(1) = [1,0], \mathbf{p}'(0) = [3,3], \mathbf{p}'(1) = [3,-3]$ og tegn figuren:
A geometric laboratory.

[1] Find først en parameterfremstilling for kurven
[2] Facit: $\kappa(t) = \frac{1}{2}$
[3] Facit: $a_T = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}; a_N = \frac{t^2+2}{\sqrt{t^2+1}}$
[4] Facit: $\mathbf{T}(0) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0), \mathbf{N}(0) = (0, 0, -1)$

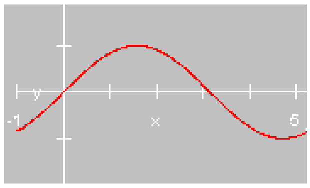
FREDRIK BAJERSVEJ 7G
9220 AALBORG ØST
9940 8855
-
RAUSSEN@MATH.AAU.DK
PEOPLE.AAU.DK/~RAUSSEN



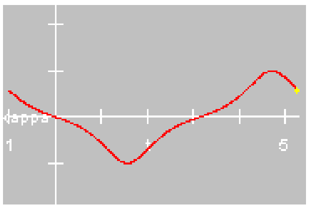
Figur 1: Kurve A



Figur 2: Kurve B

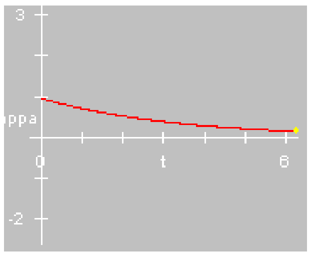


Figur 3: Kurve C



Figur 4: krumning 1

Figur 5: krumning 2



Figur 6: krumning 3