

Matematik og Form

Lineære ligningssystemer

Martin Raussen

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet

2012

Ligningssystemer og matricer

Til et ligningssystem svarer der en **totalmatrix** $[A|\mathbf{b}]$ bestående af **koefficientmatrix** A og **højreside** $\mathbf{b}$.

Omvendt oversættes totalmatricen $[A|\mathbf{b}]$ til **matrixligningen**

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ med den ubekendte vektor } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} - \text{et lineært}$$

ligningssystem “på kort form”.

Elementære rækkeoperationer

på ligningssystemer og matricer

ledende koefficient i en række: det første element $\neq 0$!

Navn	Formål (i en søjle)
Række ombytning	ledende koefficient op, 0-taller ned!
Række addition	0-taller under/over ledende koefficient!
Række multiplikation	ledende koefficient 1!

To matricer kaldes **rækkeækvivalente** hvis man kan overføre den ene i den anden ved en eller flere elementære rækkeoperationer.

Hvorfor? To ligningssystemer svarende til rækkeækvivalente totalmatricer har **samme løsningsmængde**!

Hvad kan man opnå gennem systematisk anvendelse af rækkeoperationer?

Echelon-matricer

Matricer på trappeform

Række Echelon-matricer

En matrix på **echelonform** har

- 1 alle 0-rækker **nederst**.
- 2 De ledende koefficienter (først i rækken $\neq 0$) flytter **til højre** når man vandrer ned ad rækkerne.
(Konsekvens: I området **under og til venstre for** en ledende koefficient står der **kun 0-taller**).

Reducerede række Echelon-matricer

En matrix på **reduceret echelonform** opfylder desuden:

- 1 Ledende koefficienter $= 1$ – kaldes **Pivoter**.
- 2 Også **over** Pivoter står der kun 0-taller.

En matrix kan ved rækkeoperationer overføres til forskellige matricer på echelonform, men kun til **en** matrix på reduceret echelonform.

Rækkereduktion til echelonform

Gauss-algoritmen (forlæns)

Algoritmen (regnemethoden) går igennem matrixens søjler **fra venstre til højre**. Den bruger

r-ombytning for at opnå at ledende koefficienter længst til venstre optræder i rækken **lige under** den sidst opnåede Pivotposition

r-addition for at opnå at der kun står **0-taller under** denne ledende koefficient.

I hver søjle: højst en ombytning, men ofte flere additioner.

Resultat: En **rækkeækvivalent** matrix **på echelonform**.

Rækkereduktion til reduceret echelonform

Gauss-Jordan-algoritmen (baglæns)

Algoritmen fortsætter fra en matrix på echelonform. Den går igennem Pivotelementer fra venstre til højre og bruger

r-multiplikation for at opnå at Pivotelementet bliver 1.

r-addition for at opnå at der også står **0-taller over** Pivotelementet.

Resultat: **Den** rækkeækvivalente matrix **på reduceret echelonform**.

Ligningssystemet svarende til en matrix på reduceret echelonform løses nemt ved at **isolere de bundne variable** (svarende til **Pivotsøjler**).

Løsningsmængden L for et lineært ligningssystem I

“The general solution”

Løsningsmængden beskriver **alle** løsninger:

$$L = \{[x_1, \dots, x_n] \in \mathbf{R}^n \mid x_1, \dots, x_n \text{ opfylder alle } m \text{ ligninger}\} \subset \mathbf{R}^n$$

- Hvis en rækkeækvivalent echelonmatrix indeholder en række på formen $[00 \dots 0 | c]$ med $c \neq 0$, så er systemet **inkonsistent** – ingen løsning – $L = \emptyset$.
- Hvis ikke, så svarer hver Pivotsøjle (som indeholder en ledende koefficient) til en **bunden** variabel og hver af de andre til en **fri** variabel.
- Er der **kun** bundne variable, så har systemet en **entydig** løsning – L har netop **ét** element $[x_1, \dots, x_n]$. Denne løsning findes umiddelbart ud fra den reducerede echelonmatrix.

Løsningsmængden L for et lineært ligningssystem II

Frie variable – bundne variable

- Frie variable kan antage vilkårlige reelle tal som værdier, uafhængigt af hinanden.
- De bundne variable udtrykkes som linearkombinationer af de frie – ved substitution med udgangspunkt i echelonmatrix.
Resultat: en parameterfremstilling for løsningsmængden L .
- L har uendelig mange løsninger hvis et konsistent system giver anledning til en eller flere frie variable (søjler uden Pivot).

Fra ligningssystem til løsningsmængde

Trin for trin

- ① Overfør ligningssystemet til (udvidet) matrix
- ② Rækkereduktion $\rightsquigarrow$ matrix på **echelonform**
 - ① Er højresiden en Pivotsøjle (er der en ledende koefficient i sidste søjle)? Systemet er **inkonsistent. Stop!**
 - ② Ellers er systemet **konsistent. Fortsæt!**
- ③ Rækkereduktion $\rightsquigarrow$ matrix på **reduceret echelonform**.
- ④ Overfør denne sidste matrix til et (ækvivalent) ligningssystem
- ⑤ Isolér **bundne** variable $\rightsquigarrow$ parameterfremstilling med de **frie** variable som parametre

Givet en $m \times n$ -matrix A med rækkeækvivalent matrix R på reduceret række echelonform.

Definition

- 1 As rang $\text{rank}(A)$: Antal Pivotsøjler i R – og dermed i A .
- 2 As nullitet (eller defekt) $\text{nullity}(A)$: Antal søjler uden Pivot.

Sumformel

$$\text{rank}(A) + \text{nullity}(A) = n.$$

(Variablene er enten bundne eller fri!)