

Matematik og Form: Lineære afbildninger. Standardmatricer

Martin Raussen

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet

2012

Lineære afbildninger

En afbildning $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ fra definitionsmængden $\mathbf{R}^n$ ind i dispositionsmængden $\mathbf{R}^m$ “spiser” n -vektorer og “afleverer” m -vektorer.

Definition

En afbildning kaldes **lineær**, hvis den opfylder

- $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$;
- $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$ for alle $c \in \mathbf{R}, \mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$;

dvs., hvis T bevarer linearkombinationer.

En lineær afbildning opfylder altid: $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Geometri: Lineære afbildninger

- overfører rette linjer i rette linjer, parallelogrammer i parallelogrammer
- bevarer proportioner langs med linjer

Matrix gange vektor som lineær afbildning

Lineære afbildninger og matricer

- Givet en $(m \times n)$ -matriks A . Så er afbildningen $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ givet ved $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ en **lineær afbildning**.
- **Enhver** lineær afbildning $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ kan **på entydig vis** beskrives som matrixafbildning $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for en passende $(m \times n)$ -matriks A .

Geometriske (mod-)eksempler

- Rotation (Drejning) i plan og rum
- Dilation (zoom, strækning), kontraktion i plan og rum
- Projektion fra rum til plan, fra plan til linje

Modeksempel:

- Translation (parallelforskydning)

Standardmatrix for en lineær afbildning

Opskrift

- Standard enhedsvektorer $\mathbf{e}_i = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0] \in \mathbf{R}^n$ med et enkelt 1-tal i position i generaliserer vektorerne $\mathbf{i} = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{j} = \mathbf{e}_2$ og $\mathbf{k} = \mathbf{e}_3$.
- Enhver vektor er linearkombination af standard enhedsvektorer:

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n.$$

- Til en lineær afbildning $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ svarer en (standard) matrix A som opfylder $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for alle vektorer $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.
 A er en $(m \times n)$ -matrix.

Opskrift

$$A = [T(\mathbf{e}_1), \dots, T(\mathbf{e}_n)]:$$

As søjler = billeder $T(\mathbf{e}_i)$ af standard enhedsvektorerne $\mathbf{e}_i$ under T .

$$\begin{aligned} \text{Hvorfor? } \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) &= x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n \Rightarrow \\ T(\mathbf{x}) &= T(x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n) = x_1 T(\mathbf{e}_1) + \dots + x_n T(\mathbf{e}_n) = A\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Simple lineære afbildninger og deres matrixrepræsentationer

Geometriske lineære transformationer

- **Refleksion** i planen (i en akse eller en vinkelhalverende; mere generelt i en linie gennem Origo)
- Refleksion i rummet (i en koordinatplan; mere generelt i en plan gennem Origo)
- **Drejning** om Origo i planen
- Drejning om en akse gennem Origo i rummet (senere)
- **Kontraktion, dilation**, herunder identitetsafbildning
- **Vridning**^a
- (Dobbelt retvinklet) **Projektion**

^aeng.: shear