Matematik og Form: Spænd. Lineær (u)afhængighed

Martin Raussen

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet

2012

Linearkombinationer. Spænd

Definition

Givet et antal vektorer $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p \in \mathbf{R}^n$.
En vektor $\mathbf{v} = c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_p\mathbf{a}_p \in \mathbf{R}^n,\ c_i \in \mathbf{R}$, kaldes en **linearkombination** af vektorerne $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p \in \mathbf{R}^n$.
Vektorernes **spænd** er mængden af alle deres linearkombinationer:

$$Span\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p\} := \{c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_p\mathbf{a}_p \mid c_i \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^n.$$

Eksempler

1. $\mathbf{a} \neq \mathbf{0} \Rightarrow Span\{\mathbf{a}\} = \{c\mathbf{a} \mid c \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^n$
   vektorer på en linje gennem Origo med retning $\mathbf{a}$.
2. $Span\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\} = \{c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbf{R}\}$
   vektorer i en plan med retningsvektorer $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$
   – med mindre $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ ligger på én linie.

Bemærk: en hel plan, ikke bare en kvadrant!

Spænd. Vektor -og matrixligninger. Ligningssystemer

Spænd $\mathbf{b} \in Span\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p\} \Leftrightarrow$

Vektorligningen $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_p\mathbf{a}_p = \mathbf{b}$ har en løsning $x_1, \ldots, x_p \Leftrightarrow$

Matrixligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en løsningsvektor $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^p \Leftrightarrow$
(A er matricen med søjlevektorer $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p$)

Ligningssystemet med udvidet matriks $[A|\ \mathbf{b}] = [\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_p|\ \mathbf{b}]$ er konsistent.

En løsning $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]$ til matrixligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med matrix $A = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]$ svarer til

- en løsning af vektorligningen $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$
- en løsning af det lineære ligningssystem med totalmatrix $[A \mid \mathbf{b}]$.

Udspænder (søjle)vektorerne hele $\mathbf{R}^m$?

Matrixligningen har en løsning for alle vektorer $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$ hvis og kun hvis

- Ligningssystemet med totalmatrix $[A \mid \mathbf{b}]$ har en løsning for alle $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$
- der efter en rækkereduktion af koefficientmatricen A findes Pivoter i hver række
- $\operatorname{rang} A = m$.

Specielt: Når $n < m$ kan vektorerne $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ ikke uspænde hele $\mathbf{R}^m$!

Definition

- En ligning $x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$ med reelle tal x_i kaldes en afhængighedsrelation mellem vektorerne $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ i $\mathbf{R}^n$.
- En mængde vektorer $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ kaldes lineært afhænging hvis de tillader en ikke-triviel afhængighedsrelation, dvs. en hvor ikke alle x_i er lig med 0.
- Mængden kaldes lineært uafhængig hvis den eneste afhængighedsrelation mellem dem er givet ved den trivielle relation $x_1 = \cdots = x_p = 0$.

Betydning

- Lineært afhængige vektorer udspænder mindre end deres antal "berettiger til".
  Ikke-trivelle afhængighedsrelationer fører til "spild".
- Spændet af lineært uafhængige vektorer er maksimalt stort i forhold til antal af vektorerne. Hver vektor i spændet er entydig linearkombination af disse vektorer.

Hvordan afgør man om en mængde $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ af vektorer i $\mathbf{R}^n$ er lineært afhængig eller uafhængig?

Opskrift

1. Dan matricen $A = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p]$ med vektorerne som søjlevektorer.
2. Rækkereduktion til echelonform.
3. Hvis alle søjler er Pivotsøjler, så er vektorererne lineært uafhængige – ellers lineært afhængige.

Hvorfor?

$x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0} \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ med $\mathbf{x}^T = [x_1, \cdots, x_p]$.
En ikke-triviel afhængighedsrelation svarer altså til en ikke-triviel løsning af ligningssystemet givet ved matrixligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$: mindst en fri variabel!

- Hvis **0**-vektoren er indeholdt i en mængde vektorer, så er denne mængde altid lineært afhængig.
- En mængde af p vektorer i $\mathbf{R}^n$ er altid lineært afhængig såfremt $p > n$ – flere vektorer end dimensionen.
- En mængde af vektorer i $\mathbf{R}^n$ er lineært afhængig hvis og kun hvis en af vektorerne er linearkombination af de andre.
- Med andre ord: En mængde af vektorer i $\mathbf{R}^n$ er lineært afhængig hvis og kun hvis man kan fjerne en eller flere vektorer uden at spændet bliver mindre.
- Den er lineær uafhængig hvis fjernelse af en af vektorerne altid fører til et mindre spænd.

Definition

Rangen af en $m \times n$ matrix A = antal af Pivotsøjler.
Nullitet (defekt) = antal søjler uden Pivot.

To rangkriterier

A har rang m $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er konsistent for alle $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$;
As søjlevektorer udspænder hele $\mathbf{R}^m$;
en Pivotposition i hver række.

A har rang n $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har højst en løsning for et $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$;
As søjlevektorer er lineært uafhængige;
en Pivotposition i hver søjle.