

Matematik og Form Splines. NURBS

Martin Raussen

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet

2012

Opgave: Find 3.grads polynomium

$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ sål. at

$$y_b = p(0) = a_0$$

$$y_s = p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$$

$$h_b = p'(0) = a_1$$

$$h_s = p'(1) = a_1 + 2a_2 + 3a_3$$

fører til et lineært ligningssystem.

Løsning

$$a_0 = p(0)$$

$$a_1 = p'(0)$$

$$a_2 = -3p(0) + 3p(1) - 2p'(0) - p'(1)$$

$$a_3 = 2p(0) - 2p(1) + p'(0) + p'(1)$$

Dermed bestemmes polynomiet $p(t)$ ved indsætning af

a_0, a_1, a_2, a_3 :

$$\begin{aligned} p(t) &= p(0) + p'(0)t + (-3p(0) + 3p(1) - 2p'(0) - p'(1))t^2 \\ &\quad + (2p(0) + 2p(1) + p'(0) + p'(1))t^3 \\ &= {}^1(1 - 3t^2 + 2t^3)p(0) + (3t^2 - 2t^3)p(1) \\ &\quad + (t - 2t^2 + t^3)p'(0) + (-t^2 + t^3)p'(1) \\ &= F_1(t)p(0) + F_2(t)p(1) + F_3(t)p'(0) + F_4(t)p'(1) \end{aligned}$$

Hermitepolynomier

$$F_1(t) = 1 - 3t^2 + 2t^3 \quad F_2(t) = 3t^2 - 2t^3$$

$$F_3(t) = t - 2t^2 + t^3 \quad F_4(t) = -t^2 + t^3$$

De **samme** polynomier for hver opgave!

Det der ændrer sig (variable) er værdierne

$p(0), p(1), p'(0), p'(1)$.

¹Sortering!

Opgave: Find 3.grads parameterfremstilling

med **vektorfunktion** $\mathbf{p}(t)$, **vektorer** $\mathbf{a}_i$

$\mathbf{p}(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \mathbf{a}_3 t^3$ sål. at

$$\mathbf{p}_b = \mathbf{p}(0) = \mathbf{a}_0$$

$$\mathbf{p}_s = \mathbf{p}(1) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$$

$$\mathbf{h}_b = \mathbf{p}'(0) = \mathbf{a}_1$$

$$\mathbf{h}_s = \mathbf{p}'(1) = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3$$

fører til et lineært ligningssystem

Løsning

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{p}(0)$$

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{p}'(0)$$

$$\mathbf{a}_2 = -3\mathbf{p}(0) + 3\mathbf{p}(1) - 2\mathbf{p}'(0) - \mathbf{p}'(1)$$

$$\mathbf{a}_3 = 2\mathbf{p}(0) - 2\mathbf{p}(1) + \mathbf{p}'(0) + \mathbf{p}'(1)$$

Kubisk parameterfremstilling

Dermed bestemmes den kubiske parameterfremstilling $\mathbf{p}(t)$ ved indsætning af $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(t) &= \mathbf{p}(0) + \mathbf{p}'(0)t + (-3\mathbf{p}(0) + 3\mathbf{p}(1) - 2\mathbf{p}'(0) - \mathbf{p}'(1))t^2 \\ &\quad + (2\mathbf{p}(0) + 2\mathbf{p}(1) + \mathbf{p}'(0) + \mathbf{p}'(1))t^3 \\ &= (1 - 3t^2 + 2t^3)\mathbf{p}(0) + (3t^2 - 2t^3)\mathbf{p}(1) \\ &\quad + (t - 2t^2 + t^3)\mathbf{p}'(0) + (-t^2 + t^3)\mathbf{p}'(1) \\ &= F_1(t)\mathbf{p}(0) + F_2(t)\mathbf{p}(1) + F_3(t)\mathbf{p}'(0) + F_4(t)\mathbf{p}'(1)\end{aligned}$$

Hermitepolynomier

$$F_1(t) = 1 - 3t^2 + 2t^3 \quad F_2(t) = 3t^2 - 2t^3$$

$$F_3(t) = t - 2t^2 + t^3 \quad F_4(t) = -t^2 + t^3$$

De **samme** polynomier for hver opgave!

Det der ændrer sig (variable) er: $\mathbf{p}(0), \mathbf{p}(1), \mathbf{p}'(0), \mathbf{p}'(1)$.

Hermitekurver

Kubiske parameterfremstillinger

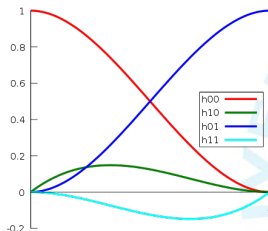
Hermitepolynomier

$$F_1(t) := 2t^3 - 3t^2 + 1$$

$$F_2(t) := -2t^3 + 3t^2$$

$$F_3(t) := t^3 - 2t^2 + t$$

$$F_4(t) := t^3 - t^2$$



Hermitekurve $\mathbf{p}(t) = F_1(t)\mathbf{P}_b + F_2(t)\mathbf{P}_s + F_3(t)\mathbf{v}_b + F_4(t)\mathbf{v}_s$
3.grads kurve med begyndelses- og slutpunkt $\mathbf{P}_b, \mathbf{P}_s$ samt
begyndelses- og sluthastighedsvektor $\mathbf{v}_b, \mathbf{v}_s$.

Bézierkurver af orden 3

Kubiske Bernsteinpolynomier

$$B_{0,3}(t) := (1 - t)^3 = -t^3 + 3t^2 - 3t + 1$$

$$B_{1,3}(t) := 3(1 - t)^2 t = 3t^3 - 6t^2 + 3t$$

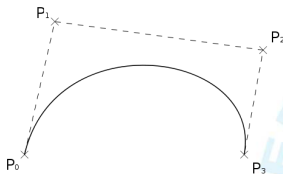
$$B_{2,3}(t) := 3(1 - t)t^2 = -3t^3 + 3t^2$$

$$B_{3,3}(t) := t^3$$

$$B_{0,3} + B_{1,3} + B_{2,3} + B_{3,3} = 1$$

$$\mathbf{B}(t) = B_{0,3}(t)P_0 + B_{1,3}(t)P_1 + B_{2,3}(t)P_2 + B_{3,3}(t)P_3$$

3. grads Bézierkurve til kontrolpunkterne P_0, P_1, P_2, P_3 .



Hermitekurver og kubiske Bézierkurver 1

Sammenligning

Hermitekurver

er 3.grads kurver som bestemmes ved
begyndelsespunkt P_b og slutpunkt P_s samt
begyndelseshastighed $\mathbf{v}_b$ og sluthastighed $\mathbf{v}_s$.

Bézierkurver af grad 3

bestemmes ved fire kontrolpunkter:
begyndelsespunkt P_0 og slutpunkt P_3 samt
to håndtag (eller magneter) P_1 og P_2 .

Man kan specificere den samme 3.ordens-kurve både som Hermitekurve og som Bézierkurve.

Hermitekurver og kubiske Bézierkurver 2

Hastighedsvektorer og kontrolpunkter

Hermitekurve: endepunkter P_b, P_s , endehastighedsvektorer $\mathbf{v}_b, \mathbf{v}_s$.

Bézierkurve: kontrolpunkter P_0, P_1, P_2, P_3 .

Hvis de skal bestemme samme 3. grads kurve:

$$F_1(t)P_b + F_2(t)P_s + F_3(t)\mathbf{v}_b + F_4(t)\mathbf{v}_s \stackrel{(*)}{=}$$

$$B_{0,3}(t)P_0 + B_{1,3}(t)P_1 + B_{2,3}(t)P_2 + B_{3,3}(t)P_3.$$

Indsæt $t = 0, t = 1$: $P_b = P_0, P_s = P_3$ (samme endepunkter).

Indsæt $t = 0, t = 1$ i den afledede til ligning (*):

$$\mathbf{v}_b = -3P_0 + 3P_1 = 3\overrightarrow{P_0P_1} \qquad \mathbf{v}_s = -3P_2 + 3P_3 = 3\overrightarrow{P_2P_3}$$

Begynd.-hastighed	= 3 · vektor mellem de to første kontrolpakter
Sluthastighed	= 3 · vektor mellem de to sidste kontrolpakter

Kubiske splines

Mål: C^2 -parameterfremstilling² for en kurve gennem punkter

$$P_0, P_1, \dots, P_n.$$

Den består af n **kubiske** parameterfremstillinger (**Hermite**)

$\mathbf{p}_1(t)$ gennem P_0 og P_1

$\mathbf{p}_2(t)$ gennem P_1 og P_2

...

$\mathbf{p}_n(t)$ gennem P_{n-1} og P_n .

C^2 svarer til :

$$\mathbf{p}'_i(1) = \mathbf{p}'_{i+1}(0) = \mathbf{v}_i$$

$$\mathbf{p}''_i(1) = \mathbf{p}''_{i+1}(0)$$

Derudover ønskes:

$$\mathbf{p}''_1(0) = \mathbf{p}''_n(1) = \mathbf{0}$$

(Krumning

$$= 0 \text{ i } P_0 \text{ og } P_1.)$$

² C^2 : 1. og 2. afledede kontinuert!

Øversættelse til lineær algebra

Ide: Find hastighedsvektorer $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sål. at

$$\mathbf{p}_1'(0) = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{p}_i'(1) = \mathbf{p}_{i+1}'(0) = \mathbf{v}_i, \quad 0 \leq i \leq n-1, \quad \mathbf{p}_n'(1) = \mathbf{v}_n$$

$$\mathbf{p}_1''(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{p}_i''(1) = \mathbf{p}_{i+1}''(0), \quad 0 \leq i \leq n-1, \quad \mathbf{p}_n''(1) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{p}_1''(0) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad 2\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 \quad = \quad \overrightarrow{3P_0P_1}$$

$$\mathbf{p}_i''(1) = \mathbf{p}_{i+1}''(0) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v}_{i-1} + 4\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{i+1} \quad = \quad \overrightarrow{3P_{i-1}P_{i+1}}$$

$$\mathbf{p}_n''(1) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v}_{n-1} + 2\mathbf{v}_n \quad = \quad \overrightarrow{3P_{n-1}P_n}$$

Lineært ligningssystem: $(n+1)$ ligninger i $(n+1)$ ubekendte

$\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$

$$\text{Koefficientmatrisen } \mathbf{A}_{n+1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & . & . & . & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Beregning af hastighedsvektorerne

Hastighedsvektorerne $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ er løsningerne til:

$$\mathbf{A}_{n+1} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{n-1} \\ \mathbf{v}_n \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} \overrightarrow{P_0 P_1} \\ \overrightarrow{P_0 P_2} \\ \vdots \\ \overrightarrow{P_{n-2} P_n} \\ \overrightarrow{P_{n-1} P_n} \end{bmatrix} \leftarrow \text{højresiden}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{n-1} \\ \mathbf{v}_n \end{bmatrix} = 3\mathbf{A}_{n+1}^{-1} \begin{bmatrix} \overrightarrow{P_0 P_1} \\ \overrightarrow{P_0 P_2} \\ \vdots \\ \overrightarrow{P_{n-2} P_n} \\ \overrightarrow{P_{n-1} P_n} \end{bmatrix}$$

Et simpelt tilfælde: $n = 3$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_3^{-1} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}, 3\mathbf{A}_3^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(7\overrightarrow{P_0P_1} - 2\overrightarrow{P_0P_2} + \overrightarrow{P_1P_2}) \\ \frac{1}{2}(-\overrightarrow{P_0P_1} + 2\overrightarrow{P_0P_2} - \overrightarrow{P_1P_2}) \\ \frac{1}{4}(\overrightarrow{P_0P_1} - 2\overrightarrow{P_0P_2} + 7\overrightarrow{P_1P_2}) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4}(5\overrightarrow{P_0P_1} - \overrightarrow{P_1P_2})^3 \\ \frac{1}{2}\overrightarrow{P_0P_2} \\ \frac{1}{4}(5\overrightarrow{P_1P_2} - \overrightarrow{P_0P_1}) \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{7P_0P_1} - 2\overrightarrow{P_0P_2} + \overrightarrow{P_1P_2} &= -7\overrightarrow{OP_0} + 2\overrightarrow{OP_0} + 7\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_1} - 2\overrightarrow{OP_2} + \\ \overrightarrow{OP_2} &= -5\overrightarrow{OP_0} + 6\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_2} = 5\overrightarrow{P_0P_1} - \overrightarrow{P_1P_2} \end{aligned}$$

3 punkter bestemmer 3 hastighedsvektorer

$$P_0 : (4, 0), P_1 : (0, 4), P_2 : (4, 4);$$

$$\overrightarrow{P_0 P_1} = [-4, 4], \overrightarrow{P_0 P_2} = [0, 4], \overrightarrow{P_1 P_2} = [4, 0];$$

$$\mathbf{v}_0 = \frac{1}{4}([-20, 20] - [4, 0]) = [-6, 5], \mathbf{v}_1 = \frac{1}{2}[0, 4] = [0, 2],$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{4}([20, 0] - [-4, 4]) = [6, -1].$$

To Hermitekurver bestemmes

Nu indsættes $P_0, P_1, \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1$ i parameterfremstilling $\mathbf{p}_1(t)$ for Hermitekurve nr. 1:

$$\mathbf{p}_1(t) = (1 - 3t^2 + 2t^3)[4, 0] + (3t^2 - 2t^3)[0, 4] + (t - 2t^2 + t^3)[-6, 5] + (-t^2 + t^3)[0, 2] = [4 - 6t + 2t^3, 5t - t^3], t \in [0, 1];$$

og tilsvarende $P_1, P_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ i parameterfremstilling $\mathbf{p}_2(t)$ for Hermitekurve nr. 2:

$$\mathbf{p}_2(t) = (1 - 3t^2 + 2t^3)[0, 4] + (3t^2 - 2t^3)[4, 4] + (t - 2t^2 + t^3)[-0, 2] + (-t^2 + t^3)[6, -1] = [6t^2 - 2t^3, -4 + 2t - 3t^2 + t^3], t \in [0, 1].$$

Kurver med $n + 1$ kontrolpunkter

n-te ordens Bézierkurver

defineres ved hjælp af **Bernstein-polynomier**

$$B_{k,n}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \text{ af grad } n.$$

$$B_n(t) = B_{0,n}(t)P_0 + \cdots + B_{i,n}(t)P_i + \cdots + B_{n,n}(t)P_n.$$

B-splines

defineres ved hjælp af stykkevis polynomiale funktioner af grad k - som er 0 på en del af intervallet.

Sammenligning: Fordele og ulemper

	støttestrukturer	grad	glathed	lokal kontrol
kubisk spline	alle	3	C^2	$\vdots$
Bézierkurve	endepunkter	n	C^∞	$\vdots$
B-spline	endepunkter	k	C^{k-2}	delvis ^a

^aKontrolpunkt har indflydelse på område svarende til $k + 1$ punkter

Beskrivelse

- kontrolpunkter $Q_0, \dots, Q_n$ og kontrolpolygon
- grad $k - 1$
- knot vektor
- vægte

NURB-Kurven (af orden k) er givet ved en (vektor-)parameterfremstilling $\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,k}(t) Q_i$.

Egenskaber

NURB-kurven ligger altid i det **konvekse hylster** bestemt ved kontrolpunkterne – $\sum_{i=0}^n N_{i,k}(t) = 1$ for alle t :

Hver af (tal-) **basisfunktionerne** $N_{i,k}(t)$ er dels et polynomium af **grad $k - 1$** , dels konstant lige med 0.

lokal kontrol: Hvert kontrolpunkt har kun indflydelse mellem fra en knude til og med de næste k styks.

Parametre

Basisfunktionerne lever på et (tids-) interval med **knots** på. **Knotvektoren** er en (svagt) voksende følge knots som ligger på dette tidsinterval.

Antal: antal kontrolpunkterne + orden (= k)

uniform: Knots har ens afstand fra hinanden, ellers **non-uniform**.

Knots kan være **multiple** – og er det gerne i starten og slutningen – eller for at frembringe **knæk**^a.

^aeng.: kink

Vægte

Til hvert kontrolpunkt Q_i kan man lade svare en **vægt** w_i . Punkter med høj vægt tiltrækker kurven særlig meget.

Parameterfremstilling $\mathbf{r}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i N_{i,k}(t) Q_i}{\sum_{i=0}^n w_i N_{i,k}(t)}$.

Derfor **rational** (=brøk)!

En særlig grund: Kun med brøker af denne form kan man beskrive cirkler, ellipser mv. eksakt!

Rhino og Grasshopper

Rhino

PointsOn Kontrolpunkterne med

Dir vandrende enhedstangentvektor

Curvature vandrende krumningscirkel og beregning af krumningen

CurvatureGraphOn Normalvektorfelt; længde = krumning.
Antal normalvektorer kan indstilles.

Grasshopper

IntCrv Interpolationskurve (spline), som går gennem de afsatte punkter.

V Point Set (læses ind i Pt).

D kurvens grad (helst ulige!, gerne 3 eller 5).

Crv NURBS kurve

V og D som for IntCrv