MAT2 – A&D 6. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

11.3.2009

Matrix præsentation for lineære afbildninger
Opskrift

Standard enhedsvektorer $\mathbf{e}_i = [0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0] \in \mathbf{R}^n$ med et enkelt 1-tal i position i generaliserer vektorerne $\mathbf{i} = \mathbf{e}_1, \mathbf{j} = \mathbf{e}_2$ og $\mathbf{k} = \mathbf{e}_3$.
Enhver vektor er linearkombination af standard enhedsvektorer:

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n.$$

Til en lineær afbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ svarer en (standard) matrix A som opfylder $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for alle vektorer $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$.
A er en $(m \times n)$-matrix.
Opskrift: $A = [T(\mathbf{e}_1), \ldots, T(\mathbf{e}_n)]$:
As søjler = billeder $T(\mathbf{e}_i)$ af standard enhedsvektorerne $\mathbf{e}_i$ under T.
Hvorfor? $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n \Rightarrow$
$T(\mathbf{x}) = T(x_1\mathbf{e}_1 + \cdots x_n\mathbf{e}_n) = x_1T(\mathbf{e}_1) + \cdots + x_nT(\mathbf{e}_n) = A\mathbf{x}$.

Simple lineære afbildninger og deres matrix repræsentationer

- Refleksion i planen (i en akse eller en vinkelhalverende; mere generelt i en linie gennem Origo)
- Refleksion i rummet (i en koordinatplan; mere generelt i en plan gennem Origo)
- Drejning om Origo i planen
- Drejning om en akse gennem Origo i rummet (senere)
- Kontraktion, dilation, herunder identitetsafbildning
- Vridning[1]
- Projektion

[1] eng.: shear

Billedmængde/kerne af en lineær afbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$

billedmængde $T(\mathbf{R}^n) = \{\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m | \exists \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}\} \subseteq \mathbf{R}^m$

kerne $\ker(T) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n | T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} \subseteq \mathbf{R}^n$

Afbildningen T med matrix repræsentation A er

surjektiv hvis $T(\mathbf{R}^n) = \mathbf{R}^m$, dvs. hvis

- matrixligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er konsistent for alle $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$
- As søjlevektorer udspænder $\mathbf{R}^m$
- der er en Pivot i hver række

injektiv hvis $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$, dvs. hvis

- matrixligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ kun har den trivielle løsning $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- As søjlevektorer er lineært uafhængige
- der er en Pivot i hver søjle

Matrixoperationer

Regning med matricer

$A = [a_{ij}], B = [b_{ij}], r \in \mathbf{R}$

Addition $A + B := [a_{ij} + b_{ij}]$ – læg koefficienterne sammen. Forudsætning: Begge matricer er $(m \times n)$-matricer.

Multiplikation m. skalar $rA := [ra_{ij}]$ – gang hver koefficient med r.

Matrixmultiplikation $AB = C = [c_{ij}]$ med $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$: prikprodukt af As i-te række med Bs j-te søjle. Forudsætning: n= antal af As søjler = antal af Bs rækker.

Sammensætning af to lineære afbildninger $T_1, T_2 \leftrightarrow$ **Matrixmultiplikation** af deres standardmatricer:

$$T_1 \leftrightarrow A_1,\ T_2 \leftrightarrow A_2 \Rightarrow T_2 \circ T_1 \leftrightarrow A_2 A_1$$