

E-opgave 2

Når man har fundet frem til en projektionsmetode (som f.eks. den "militære projektion" fra E-opgave 1) kan man prøve at modificere resultatet. Man kan f.eks. dreje eller spejle tegningen i en passende akse i planen. Eller man kan se hvad der sker når man spejler objektet i en plan i rummet først.

Hvordan kan man beskrive den slags operationer ved matricer og hvordan ændrer det den sammensatte projektion?

1. En linie gennem Origo i planen med vinklen φ i forhold til X-aksen er givet ved parameterfremstillingen

$$l_\varphi : t \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}, t \in \mathbf{R}.$$

Gør rede for, at planens **spejling i denne linie** kan beskrives som den lineære afbildning

$$S_\varphi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, \mathbf{x} \mapsto S_\varphi(\mathbf{x})$$

med **standard matrix**

$$B_\varphi = \begin{bmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{bmatrix}.^1$$

Tegning!

2. Bestem standard matricen for **sammensætningen** (composition) af spejlingerne i to akser givet ved l_φ og l_ψ – med vinklerne φ og ψ i forhold til X-aksen. Gør rede for, at denne sammensætning svarer til en **drejning om Origo**. Med hvilken vinkel?².
3. Lad $p_{\mathbf{a}} \subset \mathbf{R}^3$ være den plan gennem Origo, som har **enhedsvektoren**

$\mathbf{a} = [a, b, c]$ som **normalvektor**; planen er givet ved ligningen

$$ax + by + cz = 0.$$

Gør rede for, at standardmatricen $C_{\mathbf{a}}$ for den **rumlige spejling** $S_{\mathbf{a}}$ i denne plan er givet ved

$$C_{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 1 - 2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1 - 2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1 - 2c^2 \end{bmatrix}.$$

Dette gøres nemmest ved at checke at $C_{\mathbf{a}}\mathbf{a} = -\mathbf{a}$ og at $C_{\mathbf{a}}\mathbf{x} = \mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in p_{\mathbf{a}}$. Hvorfor er det mon nok?³

4. Bestem standardmatricen M for sammensætningen af de tre lineære afbildninger
 - først en rumlig spejling i planen $p_{\mathbf{a}}$,
 - så F (den "militære projektion" fra E-opgave 1)
 - og sidst en plan spejling i linien l_φ

som produkt af tre matricer – udregning af dette produkt kræves ikke!

¹Vink: Bestem $S_\varphi(\mathbf{e}_1)$ og $S_\varphi(\mathbf{e}_2)$. Det gælder at $S_\varphi(\mathbf{e}_2) = -S_\varphi(\widehat{\mathbf{e}_1})$. Hvorfor?

²Brug de trigonometriske formler

$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$, $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$

³Hver rumlig vektor \mathbf{y} kan skrives på formen $\mathbf{y} = c\mathbf{a} + \mathbf{x}$ med første led parallel til \mathbf{a} og andet led indeholdt i planen $p_{\mathbf{a}}$