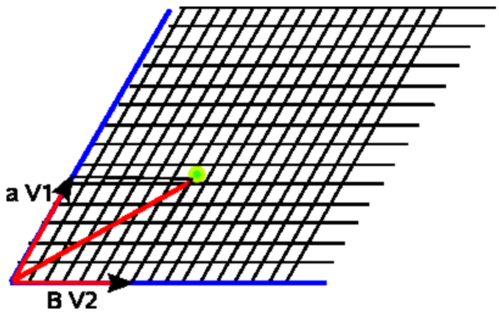
Repetition og perspektivering:

kl. 8:15 – 8:45 i Auditorium 3.
Rækkereduktionsalgoritme. (In)konsistens.
Parameterfremstilling for løsningsmængden.
Desuden nogle få ord om linearkombinationer af vektorer.



Forelæsningens 1. del:

kl. 8:50 – 9:25 i Auditorium 3.

Mål og indhold:

Nu skal vi til at knytte en række begreber fra den geometriske og den algebraiske verden sammen:

1. linearkombinationer og spænd (geometri)
2. vektorligninger (algebra)
3. matrixligninger og (algebra)
4. (de kendte) lineære ligningssystemer (algoritme=regnemetode).

Spænd: Mængden af alle linearkombinationer $c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_p\mathbf{a}_p \in \mathbf{R}^n$ med reelle koefficienter (eller vægte) af et antal vektorer $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p$ i $\mathbf{R}^n$ kaldes vektorernes spænd[1] $\text{Span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p\} \subset \mathbf{R}^n$.
Spændet har følgende geometriske interpretation: Spændet af én vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ svarer til vektorerne på en ret linie med retningsvektor $\mathbf{v}$ gennem Origo. Spændet af to vektorer svarer typisk, men ikke altid, til en plan gennem Origo (og ikke, hvad mange fejlagtigt tror, til det område "mellem" de to vektorer; det drejer sig om en hel plan!)

Vektorligninger: Er en given vektor $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ indeholdt i spændet $\text{Span}\{\mathbf{a}_1, \ldots \mathbf{a}_p\}$? Svaret findes ved at løse en vektorligning $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_p\mathbf{a}_p = \mathbf{b}$, eller et ækvivalent lineært ligningssystem hvis totalmatrix har søjler $[\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_p \mid \mathbf{b}]$. Vektoren er indeholdt i spændet hvis og kun hvis dette ligningssystem er konsistent.

Bemærk at vi nu har brugt en matrix i to forskellige funktioner: som "kode" for

- et lineært ligningssystem
- en vektorligning.

Flere brug af matricer følger!

Opgaveregning:

kl. 9:30 – 11:20 i grupperummene.

Opgaver:

Lay, 1.3, p. 37 – 38: 3, 7, 15.

Lay, 1.2, p. 26 – 27: 33, 25[2], 29, 31.

lidt systematik: Beskriv alle mulige totalmatricer på *reduceret echelonform* svarende til to lineære ligninger i to ubekendte. Benyt små latinske bogstaver for vilkårlige reelle tal. Find ud af om systemet er konsistent. I givet fald ønskes en parameterfremstilling

[1] eng.: span
[2] Bemærk: Der står række, ikke søjle!

for løsningsmængden.[3]
Eksempel: $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.
Systemet er konsistent.
Løsningsmængde $L =$
$\{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -a \\ 1 \end{bmatrix} \mid \quad x_2 \in \mathbf{R}\}$.

Forelæsningens 2. del:

kl. 11:25 – 12 i Auditorium 3.

Mål og indhold:

Matrix gange vektor: En ny og ret så væsentlig operation er produktet $A\mathbf{x}$ mellem en $m \times n$ matrix A og en n-vektor $\mathbf{x}$; resultatet er en m-vektor. Resultatvektorens m koefficienter beregnes som prikprodukter mellem matricens m rækkevektorer og vektoren $\mathbf{x}$. Resultatvektoren er den linearkombination af matricens søjlevektorer hvis vægte er givet ved indgangene i vektoren $\mathbf{x}$.

Theorem 4 i lærebogen (p. 59) viser den tætte sammenhæng mellem ovennævnte aspekter:
a. svarer til løsbarhed af matrixligninger (3. ovenpå);
b. og c. svarer til løsbarhed af vektorligninger (1./2.);
d. svarer til løsbarhed af lineære ligningssystemer (4.).

Litteratur:

Lay, 1.3 – 1.4, pp. 44 – 60.

Software:

Denne webside demonstrerer udregning af produktet mellem en matrix og en vektor.

Næste gang:

Mandag, den 15.2., kl. 8:15 – 12:00.
Homogene/inhomogene ligningssystemer og deres løsningsmængder.
Lineær uafhængighed.
Lay, 1.5, pp. 50 - 54; 1.7, pp. 65 – 70.

[3]Der er syv forskellige typer af sådanne matricer. Tre af dem svarer til inkonsistente systemer. En type svarer til et system med entydig løsning.

FREDRIK BAJERSVEJ 7G
9220 AALBORG ØST

9940 8855

RAUSSEN@MATH.AAU.DK
HTTP://WWW.MATH.AAU.DK/~RAUSSEN