Repetition og perspektivering

kl. 8:15 – 8:45 i Auditorium 3.
Lineær (u)afhængighed.
Lineære og matrix-afbildninger.

1. forelæsning

kl. 8:50 – 9:25 i Auditorium 3.

Mål og indhold:

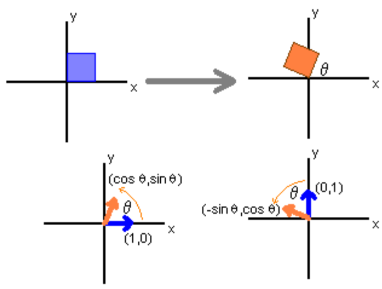
Standardmatricen for en lineær afbildning:
Sidste gang gjorde vi rede for at enhver matrixafbildning $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ er en lineær afbildning; den "respekterer linearkombinationer".
Omvendt gælder det, at enhver lineær afbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ faktisk kan beskrives ved en matrixafbildning $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, hvor A er en $(m \times n)$-matrix, som kaldes standardmatricen (eller matrix præsentationen) for den lineære afbildning T.

Her er opskriften til hvordan man finder A: Man tager standard enhedsvektorene $\mathbf{e}_i$: et 1-tal i position i, 0-taller på alle andre positioner. Så bestemmer man deres billeder $T(\mathbf{e}_i)$ under den lineære afbildning T. Disse vektorer $T(\mathbf{e}_i)$ indsættes nu efter tur som søjler i standardmatricen A.
På formelsprog:

$$A = [T(\mathbf{e}_1), \ldots, T(\mathbf{e}_n)].$$

Geometriske eksempler for lineære afbildninger:
Mange geometrisk væsentlige afbildninger er lineære, og vi bestemmer deres standardmatricer:

- drejninger om Origo i plan og rum,
- spejlinger i en linie gennem Origo i planen, hhv. i en plan gennem Origo i rummet,
- skaleringer,
- strækninger og skrumpninger i aksernes retninger,
- "vridninger",
- projektioner (vigtig i forbindelse med teknisk tegning)
- ...



Opgaveregning:

kl. 9:30 – 11:20 i grupperummene.

Opgaver:

Lay, 1.7, pp. 87 – 88 21[1], 27, 31, 37

Lay, 1.8, pp. 95 – 98 7, 15[2], 21[3], 31

Lay, 1.9, pp. 106 – 108 3, 7.

2. forelæsning

kl. 11:25 – 12 i Auditorium 3.

[1] F-F-T-T
[2] Opgaveteksten begynder nederst i 1. søjle!
[3] T-F-F-T(dette vises først i 1.9)-T

Fredrik Bajersvej 7G · 9220 Aalborg Øst
9940 8855
raussen@math.aau.dk · http://www.math.aau.dk/~raussen

Mål og indhold:

Surjektivitet, injektivitet, nulrum:
Vi kan bruge matrix præsentationen til at afgøre om en lineær afbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ er surjektiv (på)[4], hhv. injektiv[5][6]: Beskrives afbildningen T ved en $(m \times n)$-matrix A, så er kravene for

surjektivitet at matricens søjler udspænder $\mathbf{R}^m$;

injektivitet at matricens søjler skal være lineært uafhængige.

Dette kan checkes ved at se efter om der er Pivotpositioner i hver række (surjektivitet), hhv. i hver søjle (injektivitet).

Særskilt væsentlig er Ts kerne, som består af alle vektorer $\mathbf{x}$ som opfylder $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$; de samme vektorer ligger i As nulrum som består af alle løsninger af matrixligninen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Afbildningen T er injektiv hvis og kun hvis denne nulrum kun indeholder vektoren $\mathbf{0}$ og ikke andre.

Matrixoperationer:
Sidst i forelæsningen begynder vi med at se på matrixoperationer, dvs. regning med matricer. Matrixaddition og multiplikation med en skalar (et reelt tal) er ikke særlig ophidsende. Mere interessant er multiplikationen af matricer, som svarer til sammensætning af lineære afbildninger – på følgende måde:
Den lineære afbildning, som produktet af to matricer svarer til, er sammensætningen af de to lineære afbildninger, som hver enkel matrix svarer til. Med andre ord: Kender man f.eks. standardmatricen for en drejning og for en spejling, så kan man finde standardmatricen for deres sammensætning[7] ved at gange matricerne sammen.
Matrixmultiplikation er vigtig, og I skal opnå fortrolighed med denne regneoperation!

Litteratur:

Lay, 1.9, pp. 98 – 106, 2.1; pp. 123 – 126.

Software:

Matrixmultiplikation på nettet.

Næste gang:

Mandag, den 8.3., kl. 8:15 – 12:00.
Introduktion til matematikken bag perspektivtegning. E-opgave 1.

[4]eng.: onto
[5]eng.: one-to-one
[6]Begreberne nævntes i forbindelse med inverse funktioner i løbet af efterårets kursus. Vi tager en hurtig repetition...
[7]"først den ene, så den anden"; eng. composition

FREDRIK BAJERSVEJ 7G
9220 AALBORG ØST
9940 8855
RAUSSEN@MATH.AAU.DK
- HTTP://WWW.MATH.AAU.DK/~RAUSSEN