Repetition og perspektivering

kl. 8:15 – 8:45 i Auditorium 3.
Determinanter: definition, egenskaber, beregning.

1. forelæsning

kl. 8:50 – 9:25 i Auditorium 3.

Mål og indhold:

Vi afslutter gennemgang af stoffet om determinanter: For større matricer er det ikke særlig praktikabelt at benytte definitionen til beregning af determinanter; det tager simpelthen for mange regneskridt. I stedet for finder man først ud af hvor meget determinanten af en matrix ændrer sig under en elementær rækkeoperation (Theorem 3, s. 289).

Metoden går så ud på at overføre en matrix til echelonform uden at bruge rækkemultiplikationer. Determinanten af en $n \times n$-matrix bliver så produktet af de resulterende Pivotelementer (med fortegn), hvis der er n af dem – og determinanten er 0 hvis der mangler Pivotelementer.

En ganske væsentlig konsekvens: (Theorem 4): En kvadratisk matrix A er invertibel hvis og kun hvis $\det A \neq 0$.

Til sidst endnu flere vigtige egenskaber af determinanter: Determinanten er invariant under transposition af matricen:

$$\det A^T = \det A.$$

Determinanten er multiplikativ:

$$\det AB = (\det A)(\det B).$$

Determinanten er multilineær, dvs. lineær når man fastholder alle rækker på nær én (se s. 213).

[1] T?-F

[2] Opgaveteksten begynder lige efter Opg. 14!

Opgaveregning:

kl. 9:30 – 11:20 i grupperummene.

Opgaver:

Lay, 3.1, pp. 206 – 208 7, 13, 25, 27, 29, 31, 39[1]

Lay, 3.2, pp. 215 – 216 3, 11, 19[2].

Lay, 2.9, pp. 196 – 198 19, 21.

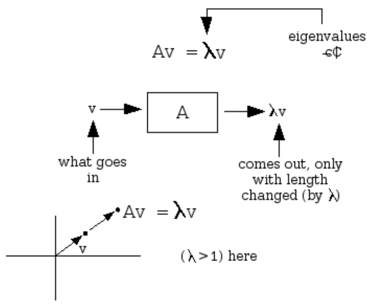
2. forelæsning

kl. 11:25 – 12:00 i Auditorium 3.

Mål og indhold:

Det sidste større emneområde for kurset har titlen: Egenvektorer og egenværdier (for en matrix, hhv. en lineær afbildning). Egenvektorer hjælper med forståelsen af den geometriske betydning af en lineær afbildning givet ved en kvadratisk matrix.

Definitionen siger, at en egenvektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ for en (kvadratisk) matrix A afbildes på et multiplum $\lambda\mathbf{x}$ af sig selv: $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Tallet $\lambda \in \mathbf{R}$ er en egenværdi for A; det er en forstørrelses/formindskelsesfaktor langs med den rette linie (gennem Origo) givet ved $\mathbf{x}$. Ikke alle lineære afbildninger har egenvektorer: Tænk f.eks. på en rotation i planen!



For at finde egenværdier og tilhørende egenvektorer og egenrum omformuleres ligningen $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ til $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ med enhedsmatricen I. Nu søger vi først efter reelle tal λ, således at matricen $A - \lambda I$ har et ikke-trivielt nulrum

$$E_\lambda = Nul(A - \lambda I) :$$

netop disse tal λ bliver matricens egenværdier.

For hver funden egenværdi λ ønsker man så at bestemme det tilhørende egenrum E_λ bestående af alle egenvektorer hørende til λ – som nullrummet
$Nul(A - \lambda I)$.

For trekantsmatricer er det nemt at finde de tilhørende egenværdier: det er bare indgangene på diagonalen.

Hvordan finder man egenværdier for en generel $n \times n$-matrix A? Fra teorien om determinanter ved vi at en kvadratisk matrix er singulær (med ikke-triviel nulrum) hvis og kun hvis dens determinant er lig med 0. Derfor beregner man As karakteristiske polynomium som $\det(A - \lambda I)$; det bliver et polynomium i variablen λ af grad n.

Egenværdierne for A er netop rødderne for dette karakteristiske polynomium. Rødderne optræder med hver deres algebraiske multiplicitet i en faktorisering af dette polynomium.

Litteratur:

Lay, 3.2, pp. 208 – 214.
Lay, 5.1– 5.2, pp. 318 – 322, 326 – 330.

Næste gang:

Mandag, den 10.5., kl. 8:15 – 12.
Similaritet og diagonalisering.
Lay, 5.1, p. 307, 5.2 – 5.3, pp. 330 – 341.