Inverse matricer – supplement

Vi ser på *kvadratiske* matricer A og C og viser:
C er venstre invers til A hvis og kun C er højre invers til A.
Enhedsmatricen noteres I.

Sætning 1. $AC = I \Leftrightarrow CA = I.$

Bevis. $AC = I \Rightarrow CA = I$:

1. $C\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = I\mathbf{x} = AC\mathbf{x} = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$:
   Ligningen $C\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har kun den trivielle løsning $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. Derfor har C en Pivotposition i hver *søjle*.
3. Idet C er kvadratisk, har C en Pivotposition i hver *række*.
4. Derfor har ligningen $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ for hver vektor $\mathbf{b}$ en entydig løsning $\mathbf{x} = \mathbf{a}$: $C\mathbf{a} = \mathbf{b}$.
5. Altså gælder for hver vektor $\mathbf{b}$:
   $CA\mathbf{b} = (CA)(C\mathbf{a}) = C(AC)\mathbf{a} = CI\mathbf{a} = C\mathbf{a} = \mathbf{b}$. Og dermed: $CA = I$.

$CA = I \Rightarrow AC = I$:

1. For hver vektor $\mathbf{b}$ har ligningen $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en løsning, nemlig $\mathbf{x} = A\mathbf{b}$:
   $C(A\mathbf{b}) = (CA)(\mathbf{b}) = I\mathbf{b} = \mathbf{b}$.
2. Derfor har C en Pivotposition i hver *række*.
3. Idet C er kvadratisk, har C en Pivotposition i hver *søjle*.
4. Derfor har ligningen $C\mathbf{x} = \mathbf{c}$ højst en løsning for enhver vektor $\mathbf{c}$.
5. Nu gælder $C(AC)(\mathbf{b}) = (CA)C\mathbf{b} = IC\mathbf{b} = C\mathbf{b}$ for enhver vektor $\mathbf{b}$.
   Altså gælder: $(AC)\mathbf{b} = \mathbf{b}$ og dermed: $AC = I$.

$\square$